Première partie

SUR LE COUCHER DU SOLEIL

1 TRIGONOMETRIE DANS LES TRIANGLES SPHERIQUES

1.1 Relation fondamentale

1.1.1 1ere méthode

Sur une sphère de centre O et de rayon 1, considérons 3 points quelconques A, B, C, soit a, b, c les mesures des côtés du triangle sphérique A, B, C (ce sont des arcs de grands cercles) et A, B, C celles de ses angles.

Soit H et K les projections de B et C sur le rayon OA, considérons le produit scalaire $\vec{OB}.\vec{OC}$.

$$\vec{OB}.\vec{OC} = (\vec{OH} + \vec{HB}).(\vec{OK} + \vec{KC}) = \vec{OH}.\vec{OK} + \vec{OH}.\vec{KC} + \vec{HB}.\vec{OK} + \vec{HB}.\vec{KC}$$

Les produits scalaires $\vec{OH}.\vec{KC}$ et $\vec{HB}.\vec{OK}$ sont nuls (vecteurs orthogonaux)

$$\vec{OB}.\vec{OC} = OB.OC.\cos(\widehat{BOC}) = 1.1.\cos a = \cos a$$

Dans le triangle rectangle OHB on a : $OH = OB\cos c = \cos c$ et $HB = OB\sin c = \sin c$

Dans le triangle rectangle OKC on a : $OK = OC\cos b$ et $KC = OC\sin b$, il en résulte : $\vec{OH}.\vec{OK} = \cos b\cos c$

$$\vec{HB}.\vec{KC} = HB.KC.\cos(\vec{HB}, \vec{KC})$$

Comme l'angle A des plans OAB et OAC est aussi l'angle des vecteurs $\vec{HB}, \vec{KC}$ on a :

$$\vec{HB}.\vec{KC} = (\sin c).(\sin b)\cos A$$

. On obtient finalement la relation fondamentale de la trigonométrie sphérique :

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A \tag{1}$$

1.1.2 2eme méthode

On reprend les mêmes notations.

On considère un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ choisi de façon que $\vec{k} = \vec{OC}$ et que B soit dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{k})$.

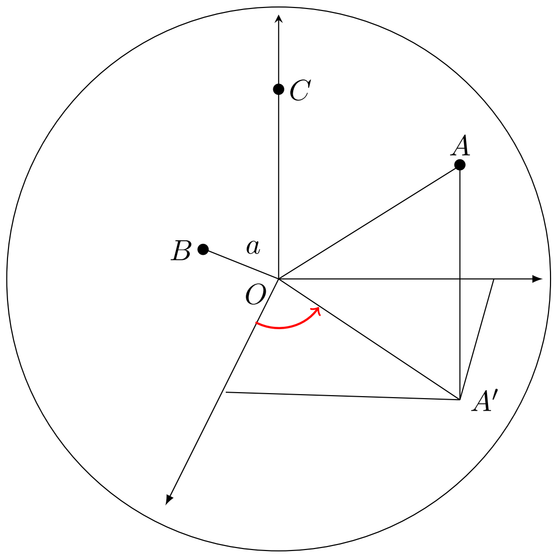

figure 1

Dans ces conditions les coordonnées sont :

$$\vec{OC}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\vec{OB}\begin{pmatrix}\sin a\\0\\\cos a\end{pmatrix}\vec{OA}\begin{pmatrix}\sin b\cos C\\\sin b\sin C\\\cos b\end{pmatrix}$$

Le produit scalaire $\vec{OA}.\vec{OB}$est alors égal à :

$$\vec{OA}.\vec{OB}=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$$

Or on a aussi $\vec{OA}.\vec{OB}=\cos c$. D'où la relation fondamentale :

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$$

1.2 Analogie des sinus

Soit P la projection de C sur le plan OAB, H et K les projections de P respectivement sur les droites OA et OB ; d'après le théorème des 3 perpendiculaires ou sa réciproque H et K sont les projections de C sur OA et OB.

Dans le triangle rectangle HOC on a $CH=\sin b$

Dans le triangle rectangle HPC on a $CP=CH\sin(\widehat{CHP})$ mais $\widehat{CHP}$ est l'angle des plans OHC et OHP c'est-à-dire OAC et OAB, c'est donc l'angle A du triangle sphérique ABC.

On a donc : $CP=\sin b\sin A$

De même $CP=CK\sin B=\sin a\sin B$

Il en résulte donc que ; $\sin b\sin A=\sin a\sin B$

D'où l'analogie des sinus :

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}\tag{2}$$

2 COORDONNEES SUR LA SPHERE LOCALE

On appelle sphère céleste locale une sphère de rayon arbitraire centrée sur l'observateur O. Pour repérer la position d'un astre E sur la sphère céleste on utilise un système de deux coordonnées.

2.1 Coordonnées horizontales

La verticale du lieu d'observation coupe la sphère locale en deux points Z et Z' appelés respectivement zénith et nadir, le plan diamétral perpendiculaire à la verticale coupe cette sphère suivant un grand cercle qu'on appelle cercle de l' horizon.
La position de l'étoile E est repérée à partir du demi grand cercle d'extrémités Z et Z' qui contient E, on l'appelle le vertical de E.
L'azimut A de E est l'angle $\widehat{SOE'}$ compté positivement dans le sens rétrograde à partir du vertical origine qui par définition contient le point cardinal Sud, la hauteur h de E est l'angle $\widehat{E'OE}$ et en degrés on a :

$$-180 \leq A \leq 180 \quad \text{et} \quad -90 \leq h \leq 90$$

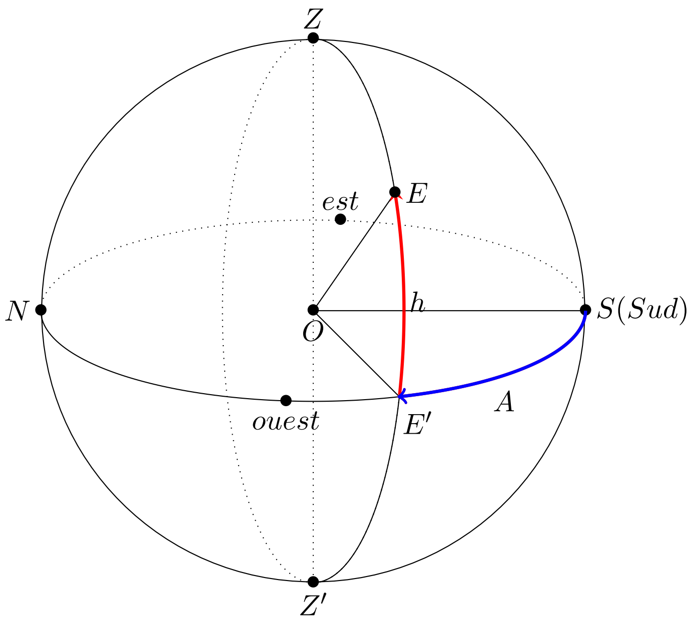

figure 2

2.2 Coordonnées horaires

L'observation montre que les étoiles décrivent sur la sphère locale des arcs de cercle dont le centre est un point P très proche de l'Etoile Polaire, on l'appelle pôle céleste Nord, le point diamétralement opposé P' s'appelle pôle céleste Sud ; les étoiles sont animées d'un mouvement circulaire uniforme d'axe PP', c'est un mouvement apparent dû à la rotation de la Terre sur elle-même, on l'appelle le mouvement diurne.

On utilise le pôle P et l'équateur céleste défini comme l'intersection du plan diamétral perpendiculaire à l'axe PP' avec la sphère céleste, pour introduire un nouveau système de coordonnées :
La position de E est repérée à partir du demi grand cercle d'extrémités P et P' qui contient E, on l'appelle le méridien de E.
L'angle horaire H est l'angle $\widehat{\Omega O m}$ mesuré sur l'équateur dans le sens rétrograde en degrés ou plutôt en heures d'angle (180 degrés = 12 heures).
La deuxième coordonnée δ est la déclinaison, elle est mesurée en degrés, c'est l'angle $\widehat{mOE}$.

$$0 \text{ heure} \leq H \leq 24 \text{ heures} \quad \text{et} \quad -90 \leq \delta \leq 90$$

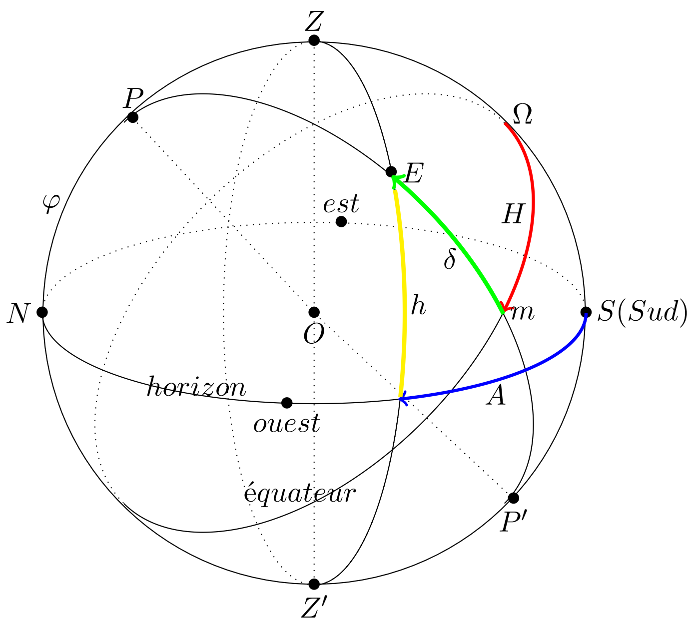

figure 3

2.3 Coordonnées équatoriales

On appelle sphère des fixes la figure constituée par les images des étoiles sur la sphère céleste, on considère que la sphère locale est en rotation uniforme par rapport à la sphère des fixes qui elle est fixe par définition ; on peut donc définir un système de coordonnées sur la sphère des fixes dans lequel les étoiles auront des coordonnées constantes en première approximation ; il s'agit des coordonnées équatoriales, ascension droite α et déclinaison δ. Par contre, les coordonnées du Soleil, de la Lune, des planètes des comètes,...seront variables, en particulier le Soleil décrit un cercle qu'on appelle écliptique en une année sur la sphère des fixes.
On utilise de nouveau le pôle Nord P et l'équateur céleste pour définir les coordonnées équatoriales d'un astre.
L'ascension droite α est l'angle $\widehat{\gamma O e}$ mesuré sur l'équateur dans le sens direct entre un méridien origine et le méridien de l'étoile E. L'origine des ascensions droites est le noeud ascendant de la trajectoire du Soleil sur la sphère des fixes, c'est-à-dire la position

du Soleil quand il franchit l'équateur en passant de l'hémisphère céleste sud à l'hémisphère nord, autrement dit la position du Soleil à l'instant de l'équinoxe de printemps ; on appelle cette position point γ. La deuxième coordonnée δ a été définie précédemment.

$$0 \text{ heure} \leq \alpha \leq 24 \text{ heures} \quad \text{et} \quad -90 \leq \delta \leq 90$$

La figure est réalisée pour le Soleil. La déclinaison du Soleil nulle aux équinoxes atteint son maximum de 23 degrés $26'$ au solstice d'été et son minimum -23 degrés $26'$ au solstice d'hiver.
L'angle $\omega = 23$ degrés $26'$ du plan de l'équateur avec le plan de l'écliptique s'appelle l'obliquité.

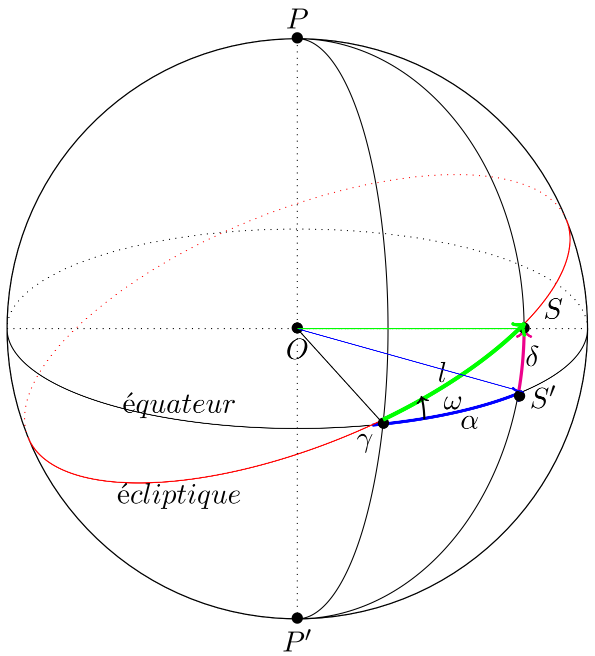

figure 4

3 UTILISATION DE PROJECTIONS

On se propose de calculer l'azimut et l'angle horaire d'un astre à l'instant de son lever ou de son coucher par une méthode élémentaire. L'observateur se trouve en un lieu de latitude φ et on considère un astre de déclinaison δ. On utilise des propriétés des triangles rectangles en projetant la sphère céleste locale successivement sur trois plans, le plan méridien défini par les points O, Z, P c'est un plan de symétrie pour la figure, le plan de l'horizon et le plan du cercle décrit par l'astre étudié. La sphère locale ayant un rayon arbitraire, nous prendrons celui-ci égal à 1, comme convenu précédemment. Les figures sont construites pour un lieu de l'hémisphère nord et pour un astre de déclinaison positive ; s'il s'agit du Soleil la date est prise au printemps ou en été. On pourra reprendre la même étude en traçant les figures correspondantes pour un astre de déclinaison négative (cas du Soleil en automne ou en hiver).

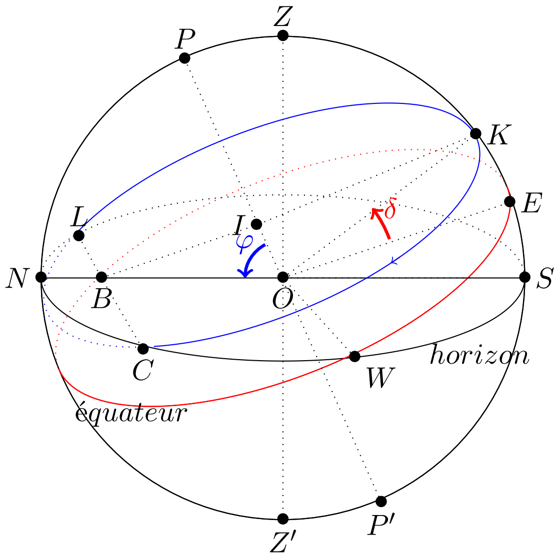

figure 5

3.1 PROJECTION SUR LE PLAN MERIDIEN

Au cours du mouvement diurne, l'astre étudié décrit sur la sphère locale un cercle de centre I, il se lève en L culmine dans le plan méridien au point K et se couche en C.

Que représentent les angle $\widehat{EOK}$ et $\widehat{BOI}$?

Calculer la longueur des côtés des triangles rectangles OIK et OIB en fonction de δ et φ.

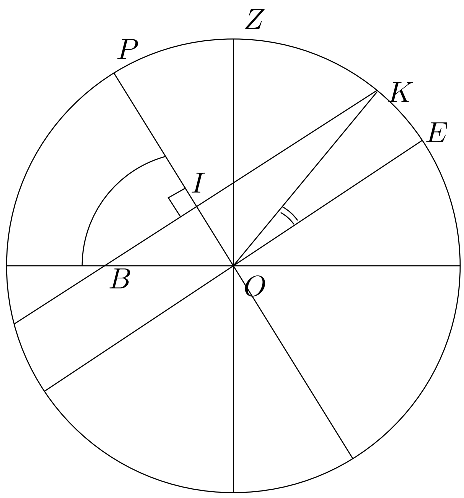

figure 6

3.2 PROJECTION SUR LE PLAN DE L'HORIZON

3.2.1 Expression de l'azimut

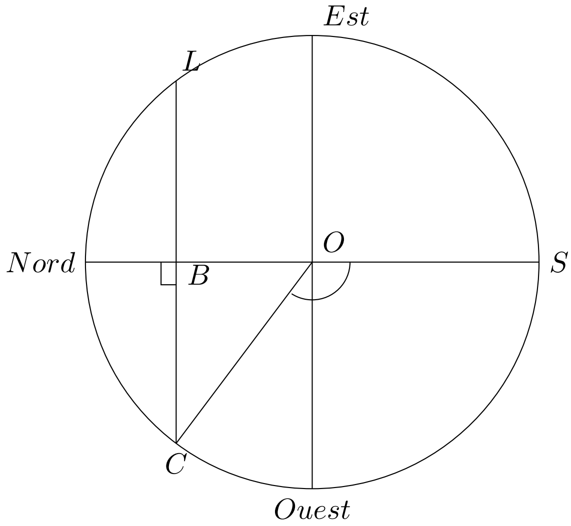

figure 7

Que représente l'angle $\widehat{SOC}$ pour l'astre considéré ? En déduire une expression de l'azimut à l'instant du coucher.

3.2.2 Application

Est-il possible que $A = 180$ degrés ?
Quels sont les lieux de la Terre où cela se produit ?
Retrouver ce résultat graphiquement.

3.3 CERCLE DECRIT PAR L'ASTRE SUR LA SPHERE LOCALE AU COURS DU MOUVEMENT DIURNE

3.3.1 Expression de l'angle horaire

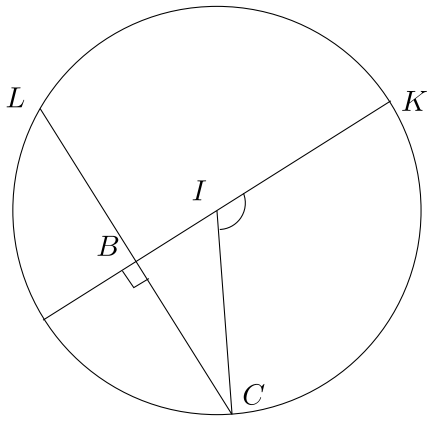

figure 8

Le cercle décrit par l'astre sur la sphère locale et l'équateur céleste sont des cercles d'axe PP', leurs plans sont parallèles.

Que représente l'angle $\widehat{KIC}$ pour l'astre considéré ? En déduire H en fonction de δ et φ.

3.3.2 Application

Quels sont les lieux de la Terre où le Soleil se couche à $18h$ mesurées en temps solaire local ?
Représenter pour ces lieux la trajectoire du Soleil sur la sphère locale.
En dehors de ces lieux, à quelles dates cette situation se présente-t-elle ? (coucher à $18h$ de temps solaire local).

3.4 CHANGEMENT DE COORDONNEES DANS LE CAS GENERAL

En utilisant la relation fondamentale dans le triangle sphérique PZE de la figure 3, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l}\cos(\frac{\pi}{2}-\delta)=\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)\cos(\frac{\pi}{2}-h)+\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)\sin(\frac{\pi}{2}-h)\cos(\pi-A)\\ \cos(\frac{\pi}{2}-h)=\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)\cos(\frac{\pi}{2}-\delta)+\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)\sin(\frac{\pi}{2}-\delta)\cos(H)\end{array}\right.$$

ou encore :

$$\left\{\begin{array}{l}\sin(\delta)=\sin(\varphi)\sin(h)-\cos(\varphi)\cos(h)\cos(A)\\ \sin(h)=\sin(\varphi)\sin(\delta)+\cos(\varphi)\cos(\delta)\cos(H)\end{array}\right.$$

Pour $h=0$ on retrouve les deux relations précédentes valables au lever ou au coucher

$$\cos A=-\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}\text{et}\cos H=-\tan\varphi\tan\delta$$

4 HEURE DU COUCHER DU SOLEIL

4.1 Exemple

Nous allons estimer l'heure du coucher du Soleil à Lille le 22 mars 2018.

Plaçons nous dans l'hypothèse simplificatrice où la longitude céleste du Soleil est une fonction affine de la date j où j est le nombre de jours écoulés depuis le passage du Soleil au point γ ; c'est une approximation parce que la vitesse de la Terre autour du Soleil n'est pas uniforme à cause de l'excentricité de son orbite.

L'équinoxe de printemps a lieu le 20 mars à 17h 15, au moment du coucher du Soleil il s'est écoulé 2 jours, la longitude céleste du Soleil est $\dfrac{360\times 2}{365,25}=1,97$ en degrés.

La déclinaison δ du Soleil est liée à sa longitude céleste, en utilisant l'analogie des sinus dans le triangle sphérique $\gamma SS'$ (figure 4), on obtient la relation

$$\sin\delta=\sin\omega\sin l \qquad (3)$$

. On trouve $\delta = 0,784$ toujours en degrés.

Comme à l'instant du coucher $\cos H = -\tan\delta\tan\varphi$, à Lille la latitude étant 50,63 degrés l'angle horaire est $H = 90,96$ degrés soit 6h 4 min. Le temps solaire local au coucher est $TSL = 12h + H$ soit 18h 4 min ; on utilisait autrefois le TSL qu'on déduit donc de l'angle horaire H du Soleil par une translation de 12h pour repérer les différents instants de la journée.

Mais H ne varie pas uniformément par rapport au temps au cours de l'année ; pour s'en convaincre il suffit de comparer, par exemple en utilisant un simple almanach, les instants de la culmination du Soleil (qu'on appelle midi vrai) en un lieu donné le 1er février et le 1er novembre.

Calculer l'instant de la culmination du Soleil en temps légal (heure de la montre) à Paris le 1er février puis le 1er novembre ; on donne les instants du lever et du coucher du Soleil à Paris à ces deux dates et on rappelle que le mouvement diurne est un mouvement uniforme.

$$\left\{\begin{array}{ccc} & \text{lever} & \text{coucher} \\ \text{1er février} & 8h22 & 17h47 \\ \text{1er novembre} & 7h39 & 17h29 \end{array}\right.$$

Pour avoir une échelle de temps plus régulière, on a défini un temps moyen TSM en utilisant un terme correctif (qu'on appelle équation du temps) donné par des tables établies par le calcul par les astronomes.

$$TSM = TSL + \text{ équation du temps}$$

L'équation du temps est égale à 7 min à la date du 22 mars ; d'où $TSM =$ 18h 11min. Le temps obtenu ou temps solaire moyen a toujours son caractère local, il dépend de la longitude, pour pouvoir comparer le temps aux différents points de la planète, on se réfère au temps moyen de Greenwich qu'on appelle temps universel.

Le temps universel s'obtient en tenant compte de la longitude λ comptée positivement vers l'Est :

$$TU = TSM - \frac{\lambda}{15}$$

On trouve 17h 59min.

On peut donc estimer l'heure légale (en France l'heure légale à la date du 22 mars est $TU + 1$) du coucher du Soleil à 18h 59min.

On peut remarquer qu'avec les élèves qui n'auraient pas de connaissances en trigonométrie élémentaire, on peut estimer le résultat par un procédé graphique, en utilisant les projections précédentes. Il suffit de réaliser la figure 6 en traçant un cercle de centre O et de rayon arbitraire, on calcule d'abord la déclinaison en utilisant la longitude céleste,on la reporte suivant l'angle $\widehat{EOK}$, on obtient le point K, on trace par K la perpendiculaire à OP ce qui donne le point I puis B et en même temps le rayon IK du cercle de la figure 8, on dispose alors de tous les éléments permettant de tracer les figures 7 et 8, d'où une estimation de H et aussi de A.

4.2 Exercice

Calculer l'azimut et l'heure légale du coucher du Soleil à Lille le 1er novembre.

5 COUCHER DU SOLEIL DANS L'ARCHE DE L'ARC DE TRIOMPHE

Deux fois dans l'année le Soleil se couche dans l'arche de l'Arc de Triomphe pour un observateur situé sur les Champs-Elysées. L'exercice consiste à déterminer ces deux dates et à calculer l'heure du coucher.

On donne la latitude de Paris 49 en degrés, et on sait que pour l'observateur, l'angle entre l'Arc de Triomphe et la direction nord est de 65 degrés vers l'ouest (c'est la direction des Champs-Elysées) .

Calculer la déclinaison du Soleil, en utilisant la relation valable à l'instant du coucher :

$$\sin\delta = -\cos A \cos\varphi$$

En déduire sa longitude céleste (on obtiendra 2 valeurs possibles), puis les dates où le phénomène peut se produire.

Calculer enfin comme précédemment l'heure du coucher.

6 ELEMENTS DE SOLUTION

6.1 Utilisation des projections

Dans le triangle OIK on a :

$$IK = OK\cos\delta = \cos\delta$$

puis

$$OI = OK\sin\delta = \sin\delta$$

Dans le triangle OIB on a :

$$OI = OB\cos\varphi$$

et

$$IB = OB\sin\varphi$$

Il en résulte ;

$$OB = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi}$$

L'angle SOC représente l'azimut A à l'instant du coucher, BOC est son supplément, le triangle OBC fournit la relation :

$$\cos A = -\frac{OB}{OC} = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}$$

L'angle BIC est le supplément de l'angle horaire H au moment du coucher.

Dans le triangle BIC on a :

$$\cos H = -\frac{IB}{IC} = -\frac{OB\sin\varphi}{IK} = -\frac{\sin\delta\sin\varphi}{\cos\varphi\cos\delta}$$

Finalement :

$$\cos H = -\tan\delta\tan\varphi$$

6.2 Est-il possible que $A = 180$ degrés ?

Il suffit que $\cos A = -1$ et pour cela que $\sin\delta = \cos\varphi$ autrement dit que $\varphi = \frac{\pi}{2} - \delta$ ou $\varphi = -\frac{\pi}{2} + \delta$ Les angles φ et δ seront donc complémentaires ce qui exige que φ soit supérieur à 67 degrés qui est la latitude du cercle polaire. La situation est symétrique dans l'Hémisphère Sud.

6.3 Lieux de la Terre où le Soleil se couche à 18 h

Il suffit que $H = 6$ h ou 90 degrés.

Puisque

$$\cos H = -\tan\delta\tan\varphi$$

cela se produit si $\varphi = 0$ ou $\delta = 0$

L'observateur est donc à l'équateur à n'importe quelle date ou bien le jour de l'équinoxe de printemps ou celui d'automne en n'importe quel lieu.

6.4 Arc de triomphe

L'azimut du Soleil au coucher est $A = 115$ en degrés. On calcule sa déclinaison en utilisant la relation $\sin\delta = -\cos A\cos\varphi$, on obtient $\sin\delta = 0,277$, on en déduit la longitude céleste : $\sin l = \dfrac{\sin\delta}{\sin\omega} = 0,696$, d'où deux valeurs possibles pour l : $l = 44,1$ et $l = 135,9$ toujours en degrés.

Dans une première approximation d'un mouvement uniforme du Soleil sur la sphère des fixes, la longitude céleste $l = 44,1$ est atteinte $\dfrac{365,25 \times 44,1}{360} = 45$ jours après l'équinoxe de printemps, donc aux environs du 5 mai ; on obtient le 6 août pour la deuxième date possible. Si on veut résoudre la question graphiquement, il suffit de réaliser la figure 7 en traçant un cercle de centre O et de rayon arbitraire, l'azimut étant donné (ainsi que la latitude) on trace C puis B milieu de LC, on reporte la distance OB sur la figure 5 en traçant un cercle de même rayon ce qui fournit OI et le point K. Enfin le report de IB sur un cercle de rayon IK fournira H.

6.5 Remarques

L'astronomie s'est construite au cours des siècles autour de la notion de modèle mathématique. Pour établir les lois du mouvement des astres, on a posé des hypothèses qui s'appuient sur l'observation mais qui décrivent la réalité physique de manière approchée. C'est ainsi que dans cette fiche les calculs effectués reposent essentiellement sur deux principes, l'uniformité du mouvement annuel du Soleil sur la sphère céleste qui nous a permis de calculer la longitude céleste en utilisant une fonction linéaire, et l'uniformité du mouvement diurne. Mais des mesures précises montrent que les résultats obtenus ne sont qu'approchés, les mouvements réels sont plus complexes, et on obtient une meilleure description de la réalité en introduisant des termes correctifs qui tiennent compte de phénomènes que nous avons négligés.

Parmi les plus importants figurent la réfraction, et la variation de la vitesse de la Terre sur son orbite qui génère une différence qu'on ne peut pas toujours négliger entre la longitude céleste du Soleil et sa partie simplement affine.

Pour une étude plus approfondie, faudrait-il prendre en compte d'autres phénomènes comme par exemple l'aplatissement de la Terre , le phénomène de précession des équinoxes, les irrégularités de la rotation terrestre,etc...