Université de Lille
IREM
S.R. - 27 juin 2018

Détermination observationnelle de l'équation du temps

Prérequis : systèmes de coordonnées célestes

L'équation du temps est un terme correctif utilisé en astronomie pour rendre compte du mouvement annuel apparent du Soleil par rapport à un *soleil moyen* fictif, ayant un mouvement uniforme sur l'équateur.

La courbe d'évolution annuelle de ce paramètre (quasiment identique d'une année sur l'autre) est représentée figure 1.

Elle résulte de deux caractéristiques du mouvement de la Terre autour du Soleil, ellipticité de l'orbite d'une part, obliquité[1] d'autre part.

L'équation du temps est à prendre en compte dans la détermination de l'heure légale.

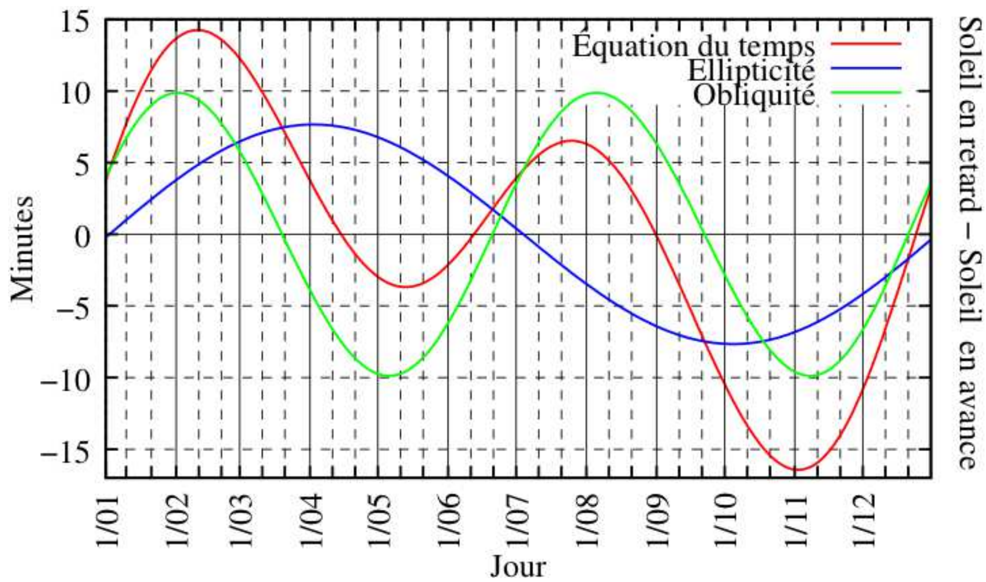

FIGURE 1 – Equation du temps (en rouge), et contributions dues à l'ellipticité (en bleu) et à l'obliquité (en vert) de l'orbite de la Terre (*Source : Wikipédia*).

L'objectif de cette fiche est d'établir l'expression (au premier ordre) de l'équation du temps à partir de l'observation du ciel. Nous allons voir que l'essentiel est de mesurer la

1. L'équateur céleste est incliné d'un angle $\epsilon = 23°26'$ appelé obliquité par rapport au plan orbital (écliptique).

déclinaison du Soleil au cours du temps.

1) Décrire une expérience permettant de mesurer en un lieu donné la déclinaison $\delta_\odot$ du Soleil en fonction du temps.

2) En déduire les dates particulières qui permettent de trouver la valeur de l'obliquité terrestre ($\epsilon = 23°26'$).

3) Redémontrer le théorème des trois perpendiculaires :
Soit (d) une droite contenue dans un plan P et M un point de l'espace. Si H est le projeté orthogonal de M sur P et K le projeté orthogonal de H sur (d), alors K est le projeté orthogonal de M sur (d).

4) En déduire que les droites (SJ) et $(O\gamma)$ de la figure 2 sont perpendiculaires.

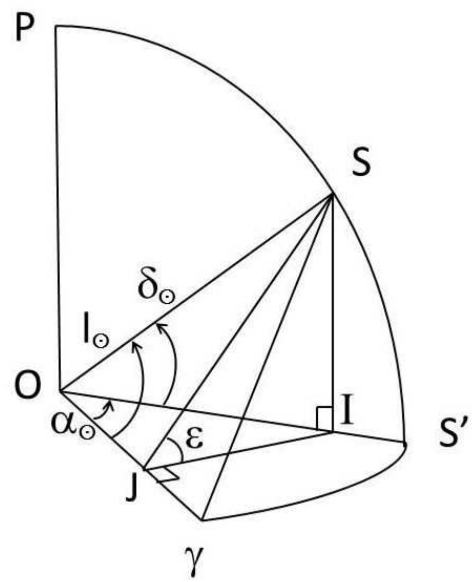

Figure 2 – Coordonnées du Soleil S (ascension droite $\alpha_\odot$, déclinaison $\delta_\odot$, longitude écliptique $l_\odot$). Le point P est le pôle céleste nord, γ est le point vernal, ϵ est l'obliquité terrestre. Le point I est le projeté orthogonal de S sur le plan de l'équateur céleste, et J est le projeté orthogonal de I sur la droite (Oγ).

5) Etablir la relation suivante à partir des triangles rectangles de la figure 2 :

$$\sin \delta_\odot = \sin \epsilon \sin l_\odot. \tag{1}$$

Le 2 janvier 2018, le Soleil est passé au méridien à Lille à 12h 51min 50s, avec une déclinaison $\delta_\odot = -22°53'30''$. Le 3 avril, le passage s'est produit à 13h 51min 05s avec $\delta_\odot = 5°23'51''$.

6) Calculer la différence de longitude $\Delta l_\odot$ entre ces deux dates, d'une part en utilisant la relation (1), d'autre part en supposant un mouvement uniforme du Soleil sur l'écliptique.

7) Quel est l'écart angulaire obtenu par rapport au mouvement uniforme ?

En refaisant cette comparaison un certain nombre de fois au cours d'une année, nous pouvons ainsi mettre en évidence une variation périodique de la longitude écliptique du Soleil par rapport au mouvement uniforme. On obtient la courbe bleue tracée sur la figure 1, de période 1 an et d'amplitude 1.9° (soit 7.6 min).

La longitude du Soleil peut s'écrire :

$$l_\odot = l_\odot(t_0) + n.(t - t_0) + 1.9^\circ \sin(n.(t - t_0)), \tag{2}$$

où $t_0 = 02/01$ et n $= 360/365.25 = 0^\circ 59' 8.25''$/j est la vitesse angulaire moyenne de la Terre par rapport au Soleil.

8) D'après l'expression (2), retrouver les dates correspondant au maximum, au minimum et à une valeur nulle de la courbe bleue.

9) À l'aide de la figure 2, vérifier :

$$\tan \alpha_\odot = \tan l_\odot \cos \epsilon. \tag{3}$$

Cette égalité va nous permettre de calculer la différence $(\alpha_\odot - l_\odot)$ et de remarquer que même si le mouvement du Soleil est uniforme sur l'écliptique, il ne l'est pas en ascension droite.

10) Utiliser la formule de l'arc moitié $\cos x = (1 - \tan^2(x/2))/(1 + \tan^2(x/2))$ pour montrer que :

$$\sin(\alpha_\odot - l_\odot) = -\tan^2(\epsilon/2) \sin(\alpha_\odot + l_\odot). \tag{4}$$

11) Sachant que la valeur de l'obliquité est $\epsilon = 23^\circ 26'$, justifier l'approximation :

$$\sin(\alpha_\odot - l_\odot) \simeq \alpha_\odot - l_\odot. \tag{5}$$

12) En déduire que la variation périodique de l'ascension droite du Soleil est donnée par :

$$\alpha_\odot \simeq l_\odot - 2.5^\circ \sin(2 l_\odot). \tag{6}$$

Le terme d'amplitude 2.5° (soit 10 min) est de période 6 mois. C'est la courbe verte tracée sur la figure 1.

13) D'après l'équation (6), retrouver les dates correspondant au maximum, au minimum et à une valeur nulle de la courbe verte.

Finalement, nous obtenons d'après (2) et (6) :

$$\alpha_\odot \simeq l_\odot(t_0) + n.(t - t_0) + 1.9^\circ \sin(n.(t - t_0)) - 2.5^\circ \sin(2 l_\odot). \tag{7}$$

14) A partir de (7) comment est obtenue l'équation du temps, c'est-à-dire la courbe rouge de la figure 1 ?

15) Justifier l'annotation sur la figure 1 « Soleil en retard - Soleil en avance » (par rapport au soleil moyen) suivant le signe de l'équation du temps.