Université de Lille
IREM
S.R. - 26 juin 2018

Angle de traversée de l'horizon d'un astre
Durée du coucher du Soleil
(réponses)

A. Angle de traversée de l'horizon d'un astre

1) Dans le triangle sphérique PZE, l'angle S est l'angle entre les plans (OZE) et (OPE). C'est aussi, dans le plan tangent à la sphère au point E, l'angle entre la tangente au vertical ZE et la tangente au cercle horaire PE.
Or au point E, la tangente au vertical ZE est perpendiculaire à la tangente au cercle de hauteur h, et la tangente au cercle horaire PE est perpendiculaire à la tangente au cercle diurne (cercle de déclinaison δ).
Donc S est également l'angle entre les tangentes au cercle de hauteur h et au cercle diurne, c'est-à-dire l'angle sous lequel l'astre franchit le cercle de hauteur h.

2) Formule fondamentale : $\cos(\frac{\pi}{2}-\phi) = \cos(\frac{\pi}{2}-\delta)\cos(\frac{\pi}{2}-h)+\sin(\frac{\pi}{2}-\delta)\sin(\frac{\pi}{2}-h)\cos S$
Avec $h=0$ on obtient bien $\cos S = \dfrac{\sin\phi}{\cos\delta}$.
La formule donne ainsi deux valeurs égales et de signes contraires entre $-\pi$ et π, la positive correspondant au coucher et la négative au lever.
N.B. : on peut vérifier par ailleurs que l'étoile a un lever/coucher si $|\delta| < \dfrac{\pi}{2} - |\phi|$.

3) Si $\phi = 0$ alors $\cos S = 0$, i.e. $S = \pm\dfrac{\pi}{2}$. Le lever/coucher est orthogonal à l'horizon.

4) Aux équinoxes, $\delta = 0$ et $\cos S = \sin\phi$, donc au coucher S est la colatitude du lieu.

5) Au coucher, $S = 39°$ (colatitude) aux équinoxes, et $S = 32.1°$ aux solstices.

B. Durée du coucher du Soleil

1) $\sin h = \sin\phi\sin\delta + \cos\phi\cos\delta\cos t$ (formule des cosinus)
$\cos h\ dh = -\cos\phi\cos\delta\sin t\ dt$ (dérivée)
$\cos h \sin S = \cos\phi\sin t$ (formule des sinus)
$\Longrightarrow \dfrac{dh}{dt} = -\cos\delta\sin S$

2) $\cos S = \dfrac{\sin\phi}{\cos\delta}$ au coucher $\Longrightarrow \sin S = \sqrt{1-\sin^2\phi/\cos^2\delta}$ (S est compris entre 0 et π donc $\sin S \geq 0$)

$$\Longrightarrow \frac{dh}{dt} = -\cos\delta\sin S = -\cos\delta\sqrt{1-\frac{\sin^2\phi}{\cos^2\delta}} = -\sqrt{\cos^2\delta-\sin^2\phi} = -\sqrt{\cos^2\phi-\sin^2\delta}$$

3) $\Delta t = \dfrac{2\text{min}}{\sqrt{\cos^2\phi-\sin^2\delta}}$ avec $\Delta h = -0.5° = -2$ min

4) La durée est donc minimale et égale à 2 minutes à l'équateur ($\phi = 0$) et au moment des équinoxes ($\delta = 0$).

5) La durée du coucher est de 3.18 min aux équinoxes et de 4.06 min aux solstices.

6) $\cos h\ dh = -\cos\phi\cos\delta\sin t\ dt$ d'après 1) et $\cos h\sin A = \cos\delta\sin t$ (formule des sinus)

$$\Longrightarrow \frac{dh}{dt} = -\cos\phi\sin A$$

D'autre part, la formule des cosinus donne :

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\delta) = \cos(\frac{\pi}{2}-h)\cos(\frac{\pi}{2}-\phi) + \sin(\frac{\pi}{2}-h)\sin(\frac{\pi}{2}-\delta)\cos(\pi-A)$$

Donc au coucher avec $h = 0$, $\cos A = -\dfrac{\sin\delta}{\cos\phi} \Longrightarrow \sin A = \sqrt{1-\sin^2\delta/\cos^2\phi}$ (A est entre 0 et π au coucher donc $\sin A \geq 0$)

$$\Longrightarrow \frac{dh}{dt} = -\cos\phi\sin A = -\cos\phi\sqrt{1-\frac{\sin^2\delta}{\cos^2\phi}} = -\sqrt{\cos^2\phi-\sin^2\delta} = -\sqrt{\cos^2\delta-\sin^2\phi}$$