Chapitre 17

Levers simultanés

17.1 Introduction

17.1.1 Objectif

On se propose de déterminer la date de l'année, pour laquelle une étoile donnée et le Soleil se lèvent simultanément, en un lieu de latitude φ.

17.1.2 Prérequis

On suppose connu les propositions suivantes :

17.1.2.1

Pour un astre quelconque d'ascension droite α, dont l'angle horaire est H à l'instant sidéral θ, on a

$$H = \theta - \alpha \qquad (1)$$

17.1.2.2

En un lieu de latitude φ, pour un astre de déclinaison δ qui a un lever et un coucher, les angles horaires H correspondant à ces deux positions sont donnés par

$$\cos H = -\tan\varphi \tan\delta \qquad (2)$$

Cette relation a été obtenue dans le chapitre *Lever Coucher*
On obtient deux valeurs opposées de H.

17.1.2.3

Si on désigne par ω l'obliquité de l'écliptique , c'est-à-dire l'angle formé par les deux plans de l'écliptique et de l'équateur céleste, alors l'ascension droite α, la déclinaison δ, et la longitude l du Soleil vérifient les relations

$$\tan\delta = \tan\omega\sin\alpha \qquad (3)$$

$$\tan\alpha = \cos\omega\tan l \qquad (4).$$

Pour obtenir ces relations, il suffit de considérer la figure ci-jointe, et de calculer de deux façons différentes, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$,dans le repère $(O, \overrightarrow{O\gamma}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP})$.
On peut écrire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= (\cos l)\overrightarrow{O\gamma} + (\sin l)\overrightarrow{OK}\\ &= (\cos l)\overrightarrow{O\gamma} + (\sin l)((\cos\omega)\overrightarrow{OA} + (\sin\omega)\overrightarrow{OP})\\ &= (\cos l)\overrightarrow{O\gamma} + (\sin l\cos\omega)\overrightarrow{OA} + (\sin l\sin\omega)\overrightarrow{OP}\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= (\cos\delta)\overrightarrow{OM_1} + (\sin\delta)\overrightarrow{OP}\\ &= \cos\delta((\cos\alpha)\overrightarrow{O\gamma} + (\sin\alpha)\overrightarrow{OA}) + (\sin\delta)\overrightarrow{OP}\\ &= (\cos\delta\cos\alpha)\overrightarrow{O\gamma} + (\cos\delta\sin\alpha)\overrightarrow{OA} + (\sin\delta)\overrightarrow{OP}\end{aligned}$$

On obtient :

$$\left\{\begin{array}{lrl}\cos l = & \cos\delta\cos\alpha & (5)\\ \sin l\cos\omega = & \cos\delta\sin\alpha & (6)\\ \sin l\sin\omega = & \sin\delta & (7)\end{array}\right.$$

En divisant membre à membre, d'une part les relations (7) et (6), d'autre part les relations (6) et (5), on obtient les formules annoncées.

17.2 Calcul de l'heure sidérale du lever de l'étoile

On connaît la latitude φ du lieu d'observation, et la déclinaison δ de l'étoile, la relation (2) donne $\cos H$ au moment du lever, d'où deux valeurs opposées de H mais comme il s'agit du lever, on prend la valeur négative.
La relation (1) fournit ensuite θ, soit θ_0 la valeur obtenue.

Il faudra ensuite déterminer la date pour laquelle le Soleil se lève quand le temps sidéral local est θ_0.

Application à l'étoile Sirius
On se place en Egypte en un lieu de latitude $\varphi = 30$, on donne $\omega = 2326'$.
Les coordonnées équatoriales de Sirius sont

$$\alpha = 6h42mn, \delta = -1637'$$

On obtient successivement

$$\cos H_S = 0,1723 \qquad H_S = 18h40mn,$$

soit

$$H_S = -(5h20mn) \qquad \theta_0 = H_S + \alpha = 1h22mn$$

17.3 Calcul de l'angle horaire $H_\odot$ et de l'ascension droite $\alpha_\odot$ du Soleil

La formule (1) donne une relation entre α et H, et les formules (2) et (3) fournissent une relation entre $\sin\alpha$ et $\cos H$ à savoir

$$\cos H = -\tan\varphi \tan\omega \sin\alpha.$$

On obtient ainsi un système non linéaire qu'on résout de deux équations à deux inconnues α et H.
On est conduit au système

$$\begin{cases} \sin\alpha_\odot = -3,993\cos H_\odot \\ \alpha_\odot = 1h22mn - H_\odot \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \alpha_\odot = 20,42 - H_\odot \\ \sin(20,42 - H_\odot) = -3,993\cos H_\odot \end{cases}$$

en développant

$$0,3489\cos H_\odot - 0,9372\sin H_\odot = -3,993\cos H_\odot \quad \Longrightarrow \quad \tan H_\odot = 4,6328$$

ce qui donne $\qquad H_\odot = 77,82 \pm 180$
Comme il s'agit d'un lever

$$H_\odot = -102,18 = 17h11mn$$

$$\alpha_\odot = \theta_0 - H_\odot = 1h22mn - 17h11mn = 8h11mn = 122,6$$

17.4 Longitude du Soleil et date cherchée

Une fois l'ascencion droite déterminée, la relation (4) donne la longitude du Soleil.
On fait ensuite l'hypothèse que le Soleil se déplace sur l'écliptique avec une vitesse uniforme, pour obtenir la date cherchée.

La longitude l du Soleil vérifie

$$\tan l = \frac{\tan \alpha_{\odot}}{\cos \omega} = -1,7044 \qquad l = 120,4$$

Cette longitude est atteinte au bout de t jours solaires après le 20 mars, date de l'équinoxe de printemps, et on a

$$120,4 = \frac{360}{365,25} t \qquad t = 122 jours$$

On obtient la date du 142 mars, c'est-à-dire le 111 avril ou le 81 mai ou le 50 juin soit enfin le 20 juillet. On ne peut pas observer le lever simultané parce que la luminosité du Soleil est bien plus grande que celle de Sirius.
L'ascension droite de Sirius est fixe alors que celle du Soleil est croissante, il en résulte que l'étoile se lève de plus en plus tôt avant le Soleil, et se voit de mieux en mieux chaque jour.
Le lever héliaque de Sirius se produit quelques jours après le 20 juillet.
On peut aussi remarquer que le jour sidéral est de 23 h 56 mn alors que le jour solaire est de 24 h, pour justifier que l'étoile se lève de plus en plus tôt avant le Soleil.