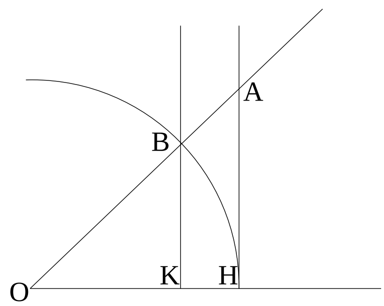
Chapitre 12

Détermination de la distance Terre-Lune

A. Approximation du sinus d'un petit angle.

Le but de cette partie est de trouver une approximation du sinus d'un petit angle.

Considérons un cercle de centre O de rayon 1. Notons H et B les points d'intersection de ce cercle et des côtés d'un angle aigu de sommet O dont on notera x la mesure en radians. Soit K le pied de la hauteur issue de B dans le triangle OBH. Soit A le point d'intersection de la droite (OB) et de la tangente en H au cercle.



1. Comparer la longueur du petit arc de cercle joignant H et B à la longueur du segment $[KB]$.

En déduire que :

$$\sin x < x$$

2. Comparer l'aire de la portion de disque se trouvant à l'intérieur de l'angle $\widehat{BOH}$ à l'aire du triangle OAH. En déduire que :

$$x < \tan x$$

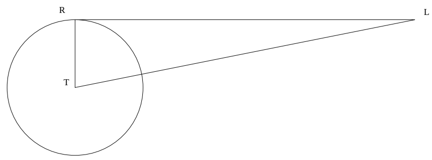
3. Déduire des questions 1 et 2 que :

$$x \cos x < \sin x < x$$

A l'aide de la calculatrice déterminer un encadrement de x pour lequel sin x et x diffèrent de moins de 0,1%.

B. Parallaxe horizontale équatoriale.

Appelons T le centre de la Terre, L le centre de la Lune et R un point de la surface de la Terre tel que le triangle RTL soit rectangle en R. L'angle RTL ne dépend pas du choix du point R. On l'appelle ***parallaxe horizontale équatoriale de la Lune***.

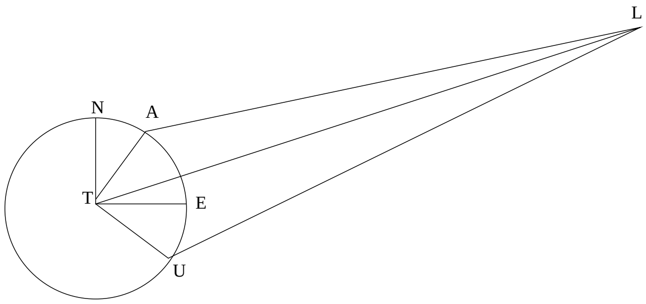


Notons p la mesure en radians de cette parallaxe, d la distance Terre-Lune, et r le rayon de la Terre.

1. Prouver que : $\sin p = r/d$

2. Par une autre méthode Aristarque de Samos (310-250 av. J.-C.) a évalué la distance Terre-Lune à environ 450 000 km. De plus Erathostène (280-198 av. J.-C.) a évalué le rayon de la Terre à environ 6000 km. Est-il judicieux d'assimiler $\sin p$ à p ?

D. Méthode de calcul de la distance Terre-Lune.



Appelons T le centre de la Terre, L le centre de la Lune, N le pôle nord terrestre. Notons d la distance Terre-Lune ($d = TL$) et r le rayon de la Terre.

A l'aide d'un théodolite on mesure l'angle que fait la Lune avec la verticale au même instant en deux points A et U d'un même méridien terrestre dont on connaît les latitudes. On notera respectivement a et u les mesures de ces angles en degrés et l_a et l_u les latitudes des points A et U.

Grâce à ces mesures on déterminera la parallaxe horizontale équatoriale de la Lune.

Connaissant le rayon de la Terre on déduira de la formule 1 du paragraphe C la distance Terre-Lune.

Appelons E le point de l'équateur se trouvant sur le méridien passant par les points A et U.

On supposera que le point A se trouve dans l'hémisphère nord, le point U dans l'hémisphère sud et que l'axe Terre-Lune coupe la surface de la Terre entre les points A et$U$.

1. Prouver que :

$$\begin{cases} \widehat{ALT} = a - \widehat{ATL} \\ \widehat{ULT} = u - \widehat{UTL} \end{cases}$$

En déduire que :

$$\widehat{ALU} = a + u - (l_a + l_u)$$

2.a. En appliquant la formule des sinus aux triangles ALT et ULT prouver que :

$$\begin{cases} \frac{\sin \widehat{ALT}}{r} = \frac{\sin a}{d} \\ \frac{\sin \widehat{ULT}}{r} = \frac{\sin u}{d} \end{cases}$$

b. En déduire que :

$$\begin{cases} \sin \widehat{ALT} = \sin p \times \sin a \\ \sin \widehat{ULT} = \sin p \times \sin u \end{cases}$$

où p est la parallaxe horizontale équatoriale de la Lune.

c. D'après l'étude menée à la question 2 de la partie C on peut déduire de la question 2.b. que :

$$\begin{cases} \widehat{ALT} = p \sin a \\ \widehat{ULT} = p \sin u \end{cases}$$

En déduire que :

$$\widehat{ALU} = p(\sin a + \sin u)$$

3.a. Déduire des question 1. et 2.c. que :

$$p = \frac{a + u - (l_a + l_u)}{\sin a + \sin u}$$

b. Calculer la parallaxe horizontale équatoriale de la Lune puis la distance Terre-Lune.