



Observatoire de Lille
Laboratoire d'Astronomie de Lille
1 Impasse de l'Observatoire
59 000 Lille
tel : 03 20 60 54 63
www.univ-lille1.fr/lal/



Astronomie de position

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Méthodes et histoire rapide de l’Astronomie | 1 |
| 1.1 | Méthodes générales de l’Astronomie | 1 |
| 1.2 | Les distances dans le système solaire et dans l’Univers | 2 |
| 1.2.1 | Unités et échelles de distances | 2 |
| 1.2.2 | Mesures de distances dans le système solaire | 3 |
| 1.2.3 | Mesure de la distance des étoiles | 3 |
| 1.3 | Histoire rapide de l’Astronomie | 5 |
| 1.3.1 | Période antique (-3000,-1000) | 5 |
| 1.3.2 | Période géocentrique (-1000,1500) | 5 |
| 1.3.3 | Période héliocentrique (1500,1780) | 7 |
| 1.3.4 | La Galaxie (1780,1920) | 9 |
| 1.3.5 | Les autres galaxies (après 1920) | 9 |
| 1.4 | Le système solaire actuel | 10 |
| 1.4.1 | Les planètes du systèmes solaire | 11 |
| 1.4.2 | Les autres composants du système solaire | 21 |
| 2 | Coordonnées sur la sphère céleste | 27 |
| 2.1 | Trigonométrie sphérique | 27 |
| 2.2 | Système de coordonnées sur la sphère | 30 |
| 2.3 | Coordonnées locales | 31 |
| 2.4 | Mouvement diurne et coordonnées horaires | 32 |
| 2.5 | Changement de coordonnées | 33 |
| 2.5.1 | Hauteur du pôle sur l’horizon | 33 |
| 2.5.2 | Changement de coordonnées | 34 |
| 2.6 | Coordonnées équatoriales et temps sidéral local | 35 |
| 3 | Le mouvement du Soleil | 37 |
| 3.1 | Coordonnées écliptiques | 37 |
| 3.2 | Mouvement du Soleil | 39 |
| 3.2.1 | Approximation par mouvement uniforme en ascension droite | 39 |
| 3.2.2 | Mouvement réel du Soleil en longitude | 40 |
| 3.2.3 | Application à la durée des saisons | 42 |
| 3.2.4 | Mouvement réel en ascension droite | 42 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.3 | Equation du temps | 43 |
| 3.4 | Calendrier et mesure du temps | 46 |
| 3.4.1 | Précession des équinoxes | 46 |
| 3.4.2 | Calendrier grégorien | 46 |
| 3.4.3 | Les différents temps | 48 |
| 4 | La Terre | 51 |
| 4.1 | Représentation astronomique de la Terre | 51 |
| 4.2 | Coordonnées astronomiques d'un lieu | 52 |
| 4.3 | Relation entre longitude et temps sidéral local | 54 |
| 4.4 | Détermination des coordonnées d'un lieu | 54 |
| 4.5 | Le point en mer : droites de hauteur | 56 |
| 4.6 | Un illustration littéraire | 61 |
| 5 | Aberration et parallaxe | 63 |
| 5.1 | Aberration | 63 |
| 5.1.1 | Etude classique | 63 |
| 5.1.2 | Etude relativiste | 65 |
| 5.2 | Construction de la position apparente | 67 |
| 5.2.1 | Aberration diurne | 68 |
| 5.2.2 | Aberration annuelle | 69 |
| 5.3 | Parallaxe | 70 |
| 5.3.1 | Définition | 70 |
| 5.3.2 | Parallaxe terrestre | 72 |
| 5.3.3 | Parallaxe en coordonnées horaires | 73 |
| 5.3.4 | Détermination géométrique de la distance d'un astre | 75 |
| 5.3.5 | Parallaxe annuelle des étoiles | 77 |
| A | Le problème des deux corps | 81 |
| A.1 | Formulation | 81 |
| A.2 | Invariance du moment cinétique et de l'énergie | 82 |
| A.3 | Résolution dans le plan de l'orbite | 83 |
| A.4 | Les mouvements elliptiques, paraboliques et hyperboliques | 84 |
| A.5 | Mouvement sur la trajectoire (cas elliptique) | 87 |
| A.6 | Eléments d'orbites | 90 |
| A.7 | La navigation spatiale | 92 |
| A.8 | Longitude du Soleil à partir de l'équation de Kepler | 95 |

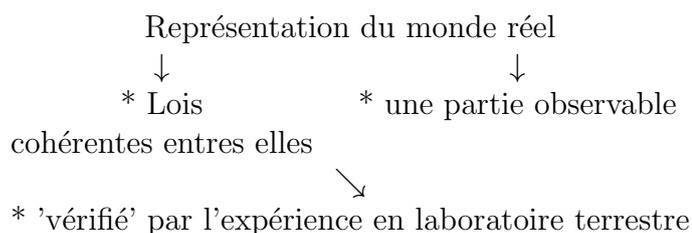
Chapitre 1

Méthodes et histoire rapide de l'Astronomie

1.1 Méthodes générales de l'Astronomie

L'astronomie est une science très ancienne. Son objet, le ciel, est à la fois très proche et très distant : très proche car il suffit de lever la tête pour l'observer, et très distant car il n'est pas "palpable". Cette particularité en a fait longtemps une science à part. Il n'est pas possible de faire des expériences sur les objets du ciel comme cela peut se faire avec les objets terrestres. De plus, les très grandes distances à considérer ou, du moins (avant que ces distances ne soient connues), l'inaccessibilité des objets à étudier, ont pu donner à l'astronomie un caractère mystérieux quelquefois magique. Cela peut expliquer ses branches non scientifiques qui lui sont quelques fois associées : astrologie, divinations, ...

L'astronomie, en tant que science, se veut une représentation du monde réel :



Si ces trois points sont acquis, on peut dire que le modèle est scientifiquement valable. Il permet donc d'expliquer, de faire des prédictions et des extrapolations. Une autre conséquence du schéma présenté est qu'il n'y a pas de vérité scientifique au sens de vérité absolue.

Un modèle dépend :

- des observations ; celles-ci dépendent elles-mêmes des technologies utilisées ; actuellement la quantité d'observations est très grande au point que le problème de gérer cette masse de données est fait dans des centres ou des équipes

TABLE 1.1 – Quelques données relatives aux astres principaux du système solaire.

| Nom | Demi-grand axe (ua) | Diamètre équatorial (Terre=1) |
|---------|------------------------|----------------------------------|
| Mercure | 0.3871 | 0.38 |
| Vénus | 0.7233 | 0.95 |
| Terre | 1.0000 | 1 |
| Mars | 1.5237 | 0.53 |
| Jupiter | 5.2026 | 11.21 |
| Saturne | 9.5547 | 9.45 |
| Uranus | 19.2181 | 4.01 |
| Neptune | 30.1096 | 3.88 |
| Pluton | 39.4387 | 0.19 |
| Lune | | 0.27 |
| Soleil | | 109 |

spécialisés : Centre de Données Stellaires (Strasbourg), Hipparcos, Natural Satellites Data Base (Paris), ...

- du niveau des connaissances théoriques ; il repose sur les mathématiques et les sciences physiques.

1.2 Les distances dans le système solaire et dans l'Univers

Les distances considérées en astronomie sont grandes. Mais surtout, ce qui est considéré comme grand à une certaine échelle, pourra être considéré comme petit si on change d'échelle. Les approximations faites ou la compréhension des phénomènes en sont grandement affectées. D'ailleurs, l'histoire de l'astronomie doit être vue en tenant compte de cette caractéristique. Une autre conséquence est qu'une seule unité de longueur ne suffit pas à appréhender toutes les distances.

1.2.1 Unités et échelles de distances

Le tableau 1.1 est extrait de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes 2002*. On voit déjà que, même en se limitant au système solaire, deux unités de longueur sont utilisées : le rayon équatorial terrestre (6378.14 km) et l'unité astronomique (1ua=149 587 870 km). Au delà du système solaire, on utilise l'année lumière (al) qui est la distance parcourue dans le vide par la lumière en une année. On utilise aussi le parsec (pc, sect. 1.2.3). On a : $1 \text{ al} = 6.32 \cdot 10^4 \text{ ua} = 0.307 \text{ pc}$, et $1 \text{ pc} = 206\,265 \text{ ua} = 3.26 \text{ al}$. La plus proche étoile du soleil, α du Centaure, est à 4.3 al (1.31 pc) du Soleil. Le diamètre de notre galaxie est estimé à environ 100 000 al.

Avec ces données, on peut se faire une idée de la taille de la Terre dans le système

TABLE 1.2 – Quelques rapports de distances.

| | km | RT | ua | al | |
|------------------------|-------------|-----|---------|---------|-------------------|
| rayon de la Terre | 6378 | 1 | | | 0.1 mm |
| rayon du Soleil | | 109 | | | 1.2 cm |
| Terre-Soleil | 149 597 870 | | 1 | | 2.6 m |
| Soleil-Pluton | | | 39 | | 100 m |
| α Centaure | | | 272 000 | 4.3 | 700 km |
| diamètre de la galaxie | | | | 100 000 | 16 millions de km |

solaire et de la taille de celui-ci dans la galaxie. C'est ce que synthétise le tableau 1.2. On pourrait compléter chacune des colonnes mais on se rendrait compte que les nombres obtenus ne sont pas "parlants" : une seule unité de longueur ne suffit pas à appréhender toutes les distances. On peut tenter d'y parvenir en faisant une homothétie de chacune des distances. La dernière colonne du tableau 1.2 donne les résultats obtenus en ramenant le rayon du Soleil à celui d'une pièce d'un euro. On ramène ainsi les distances (à l'exception de la dernière) à des valeurs "humaines" dans le sens où on peut considérer que notre cerveau sait appréhender des distances comprises entre 0.1 mm et 700 km.

1.2.2 Mesures de distances dans le système solaire

Toutes les mesures de distances faites dans le système solaire sont fondées sur la connaissance des dimensions de la Terre. Ces dernières sont issues de mesures de triangulation et surtout, à l'heure actuelle, de satellites géodésiques (au millimètre près).

La distance Terre-Lune est mesurée par laser à l'aide des 4 réflecteurs laser déposés sur la Lune par les missions Apollo dans les années 70. La précision atteint quelques centimètres.

Les distances de la Terre aux planètes sont données grâce à la Mécanique céleste (grossièrement : les lois de Képler). Les faisceaux radar envoyés sur les planètes permettent aussi de connaître leurs distances. Enfin, les sondes spatiales envoyées pour explorer le système solaire ont été suivies par radio jusqu'à plusieurs dizaines d'unités astronomiques.

1.2.3 Mesure de la distance des étoiles

La parallaxe

On observe à 6 mois d'intervalle une même étoile suffisamment proche. On voit alors cette étoile dans deux directions légèrement différentes. La mesure de ces directions permet de déterminer l'*angle de parallaxe* de l'étoile qui est défini comme l'*angle sous lequel, depuis cette étoile, on verrait le rayon de l'orbite terrestre*. L'étoile la plus proche (α du Centaure) a un angle de parallaxe égal à $0''76$.

La parallaxe est à l'origine d'une nouvelle unité de distance –le parsec (ou pc)– qui représente la distance pour laquelle on voit le rayon de l'orbite terrestre (1 ua) sous un angle de 1". On a donc :

$$1 \text{ parsec} = 206\,264,8 \dots \text{ ua}$$

. Par exemple, la distance de α du Centaure vaut $1 / 0,76 = 1,31$ pc. Avec le satellite Hipparcos la précision atteinte sur les mesures de parallaxe est de l'ordre de 0"002 ce qui correspond à 500 pc.

Pour des distances plus grandes, on utilise des méthodes indirectes.

La luminosité

La *magnitude apparente* m d'une étoile est définie par : $m = -2,5 \log_{10}(I/d^2) + C$ où I est l'intensité lumineuse de l'étoile et d sa distance à la Terre et C une constante. Avec cette échelle logarithmique, on garde la classifications des anciens entre les étoiles de "première grandeur", de "deuxième grandeur", etc ... Ainsi $m = 0$ pour l'étoile la plus brillante de la constellation de la Lyre (Véga) qui a été prise pour référence et $m = 5$ est la limite des étoiles visibles à l'œil nu. Avec les grands télescopes actuels, on peut atteindre une magnitude de l'ordre +30. A l'inverse, le Soleil a une magnitude apparente de -27 .

La *magnitude absolue* est définie comme la magnitude apparente qu'aurait une étoile si on l'observait à une distance d_0 fixée arbitrairement à 10 pc, :

$$M = -2,5 \log_{10}(I/d_0^2)$$

. On a ainsi :

$$M = m - 5 \log_{10} d + 5 \quad \text{où } d \text{ est en pc}$$

. Pour le Soleil, M vaut 4,8.

Pour les étoiles proches, celles pour lesquelles on a pu mesurer leur distance par leur parallaxe, on peut calculer M (puisque que l'on mesure assez facilement m). Cela a permis de faire des études astrophysiques qui ont montré, entre autres, que M est fonction de la température de l'étoile. Cette température peut être déterminée par analyse spectroscopique de la lumière reçue de l'étoile. Cette loi, que l'on visualise sur une figure appelée diagramme H-R (pour Hertzsprung et Russell qui l'ont trouvée en 1910), peut bien sûr s'extrapoler aux étoiles dont on ne connaît pas la distance (au delà de 500 pc). Avec la relation précédente entre m et M , on détermine la distance d de l'étoile. D'autres lois¹ permettent aussi de déterminer M et donc d . Ce sont toutes des méthodes indirectes de détermination de distances car elles sont basées au départ sur les mesures de parallaxe. Ces lois peuvent être des lois physiques ou des lois empiriques.

1. relation masse-luminosité, parallaxe dynamique, novae, supernovae et rotation des galaxies spirales

Citons encore un exemple : les Céphéides sont des étoiles dont la luminosité varie intrinsèquement avec une période qui va de 0,3 à 100 jours ; Leavitt en 1912 a trouvé la relation suivante entre la période P et la magnitude absolue M des Céphéides :

$$M = a \log P + b$$

où a et b sont des constantes. Ces étoiles étant intrinsèquement très lumineuses, elles sont visibles jusqu'à près de 20 Mégaparsec donc au delà même de notre galaxie. Ainsi, Leavitt estima la distance des Nuages de Magellan qui sont des galaxies satellites à la Voie Lactée (notre galaxie) à environ 100 000 pc.

Enfin, pour les galaxies plus lointaines, il y a la loi de Hubble :

$$V_r = H D$$

qui relie la vitesse radiale d'éloignement des galaxies à leur distance. La vitesse radiale est mesurée par l'effet Doppler-Fizeau de la lumière c'est à dire son décalage vers le rouge. Cette loi était empirique au moment de sa découverte par Hubble. Actuellement, on l'explique par une expansion de l'Univers lui-même modélisée par la théorie du "Big-Bang" qui s'appuie sur la relativité générale. Cette loi permet d'estimer les distances jusqu'aux "confins" de l'Univers. Malheureusement la valeur de H , appelée constante de Hubble, est mal connue (entre 50 et 100 km/s par Mpc). De plus, l'interprétation de la loi de Hubble pour de très grandes distances n'est pas claire : outre une précision de seulement 50% pour chaque distance ainsi déterminée, la valeur elle-même de la distance n'a pas une grande fiabilité.

1.3 Histoire rapide de l'Astronomie

1.3.1 Période antique (-3000,-1000)

Avec l'aide de pyramides, temples ou autres alignements, on observe les positions apparentes de quelques astres seulement : Soleil, la Lune et quelques étoiles brillantes. Le temps est lié au mouvement de rotation de la Terre : le jour est divisé en 12h et la nuit est elle aussi divisée en 12h. Le mouvement de la Terre autour du Soleil est observé par l'apparition des constellations durant la nuit (figure 1.1).

1.3.2 Période géocentrique (-1000,1500)

Durant cette période, l'astronomie s'est développée principalement autour de la Méditerranée : Grèce ancienne, Afrique du nord et le monde arabe.

Thalès (-600) pense que la Terre est plate et qu'elle flotte sur l'eau sous la sphère céleste.

Pour Pythagore (-530) et Aristote (-355), la Terre est sphérique et tourne autour d'un feu. La Terre est entourée de 10 sphères concentriques en cristal (pureté?). Ces sphères portent les planètes et les étoiles. Le ciel étant supposé en harmonie, une

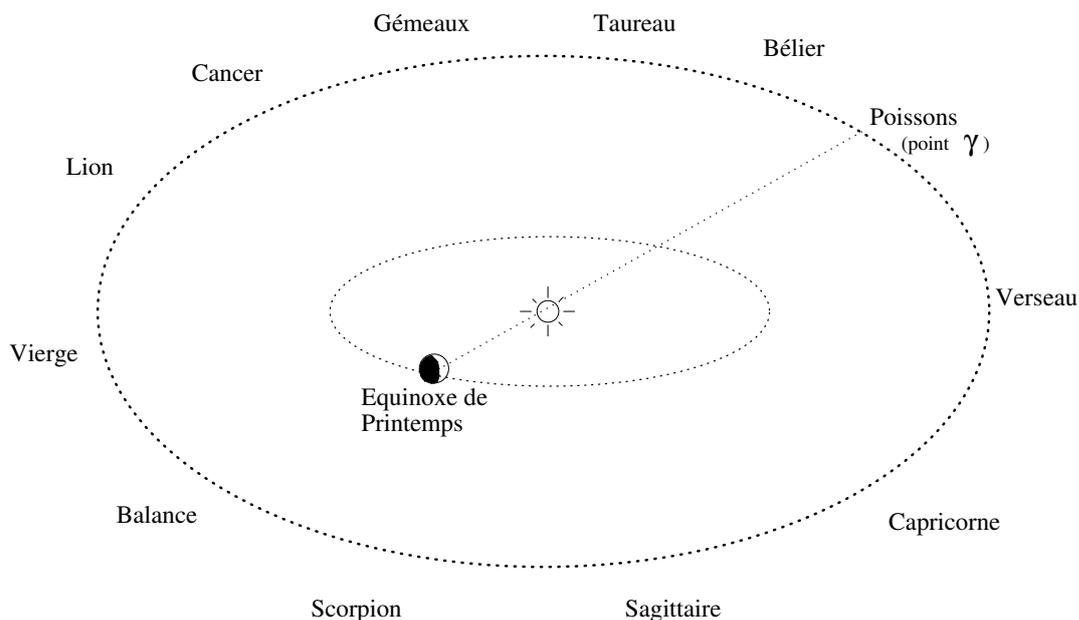


FIGURE 1.1 – Mouvement de la Terre autour du Soleil et mouvement apparent du Soleil à travers les constellations.

analogie est faite entre la répartition de ces sphères et la musique (“harmonie des sphères”).

Vers la même époque, Eratostène (-250) et Aristarque de Samos (-280) font les premières estimations de distances. Le premier détermine le rayon terrestre, le deuxième les distances Terre-Lune et Terre-Soleil grâce, d’une part, à l’observation des phases et des éclipses de la Lune et, d’autre part, à un modèle héliocentrique du système solaire.

Hipparque (-150) a classé 800 étoiles en 6 “grandeurs” (appelées ensuite magnitudes apparentes). C’est le premier “catalogue d’étoiles”. Il a découvert la précession des équinoxes, c’est à dire le fait que la position du Soleil à l’équinoxe de printemps (point γ , voir fig. 1.1) dérive lentement de $50''$ par an dans le ciel dans le sens rétrograde (voir sect. 3.4.1). Ainsi, le point γ était plus dans la constellation du Bélier en -1000 ; il est actuellement dans la constellation du Poisson.

Ptolémée (+150) rassemble les connaissances de l’époque dans l’*Almageste* et décrit les mouvements (géocentriques) des planètes. Cette description sera utilisée pendant 1300 ans.

Ensuite l’Europe entre dans l’“âge noir” de l’astronomie. Il n’y a que dans le monde arabe que l’astronomie fleurit encore. Al-Battâni (900) mesure précisément la durée de l’année ainsi que l’excentricité de l’orbite du Soleil autour de la Terre.² L’*Almageste* est traduit en arabe vers 820. Les mesures des phénomènes astronomiques sont plus précises et collectées en quantité plus importantes. Ces observations seront

2. Nous n’avons pas considéré ici d’autres civilisations comme la civilisation chinoise, plus lointaines de la nôtre.

très utiles ensuite en Europe. D'ailleurs, de nombreux termes astronomiques provenant de l'arabe sont toujours en usage. Outre le mot "Almageste" déjà vu, il y a aussi "zénith", "nadir", "almanac", "Algol", "Aldébaran", "Altaïr", "Bételgeuse", ... et enfin "Algèbre". Les arabes introduisent en effet le système décimal (1,2,3,...), le signe "0" pour zéro et la trigonométrie sphérique (voir Chap. 2). Malheureusement, ils n'ont pas, en astronomie, développé de nouveaux modèles, se contentant d'utiliser ceux issus de la Grèce ancienne.

1.3.3 Période héliocentrique (1500,1780)

Copernic (1543) propose un modèle héliocentrique pour décrire le mouvement du Soleil et des planètes.

Des progrès en mathématiques sont réalisés : algèbre, table de sinus de $10''$ en $10''$ et le logarithme (Neper, 1614).

Tycho Brahé (1575) observe, à l'oeil nu, les planètes et notamment Mars. Il mesure la parallaxe des comètes montrant ainsi que ce sont des phénomènes célestes. Ces observations atteignent la précision de $1'$. Logiquement, il garde une vision géocentrique du système solaire car sinon, dit-il, il devrait observer le phénomène de la parallaxe annuelle (sect. 1.2.3).

Képler (1600) qui était l'élève de Tycho Brahé, grâce aux observations de celui-ci, publie ses trois lois (voir Chap. A). La première dit que la Terre et les planètes décrivent chacune une ellipse dont le Soleil est l'un des deux foyers. La deuxième, appelée aussi "loi des aires", dit que la surface balayée par le rayon vecteur est proportionnelle au temps (ou de manière équivalente, que la vitesse aréolaire est constante). La troisième relie le demi-grand axe a de l'orbite de la planète avec sa période T de révolution : $a^3/T^2 = \text{Cste}$. Ces lois sont purement descriptives. Cela signifie qu'elles sont empiriques, Képler les ayant déduites des observations seules. Elles ont été démontrées plus tard par Newton dans le cadre de sa théorie de la gravitation universelle et avec le principe d'inertie de Galilée.

Galilée (1620) jette les bases de la mécanique en énonçant le principe d'inertie : un corps ne se met pas spontanément en mouvement, ou encore, dans un système isolé le mouvement d'une particule est rectiligne et uniforme. Il manque, pour vraiment développer cette discipline, la définition des forces qui est sous-entendue par ce principe et notamment celle de la gravitation universelle. C'est Galilée qui a eu l'idée de pointer la lunette vers le ciel mettant ainsi en évidence le relief lunaire et les taches solaires. Ces deux observations mettent à mal l'idée, qui a dominé longtemps, d'un ciel qui serait le domaine de la perfection. C'est donc un pas vers l'idée que les lois physiques doivent être universelles. De plus, sa lunette lui a permis de découvrir quatre petits corps qui tournent autour de Jupiter. Ces corps sont appelés depuis les quatre satellites galiléens de Jupiter. Cette découverte renforce la vision de Copernic en montrant qu'il existe des corps qui ne tournent pas autour de la Terre.

En 1667, l'Observatoire de Paris est fondé. C'est le plus ancien observatoire encore en activité. C'est là que Cassini et Picard détermineront précisément le rayon de la

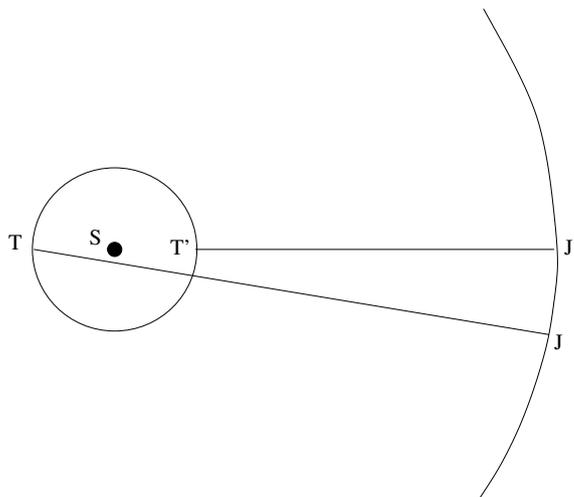


FIGURE 1.2 – Mesure de la vitesse de la lumière

Terre. Römer y détermine la vitesse c de la lumière en observant les occultations des satellites galiléens par Jupiter : si la lumière était instantanée (ie : si c était ∞), les occultations de Io par Jupiter s’observeraient depuis la Terre à intervalles de temps réguliers. Or Römer observe un décalage qui dépend de la position de la Terre par rapport au Soleil (et donc par rapport à Jupiter). Entre les deux positions extrêmes de la figure 1.2, ce décalage est de 998 s. Or $998 \sim \frac{TT'}{c}$, donc $c = \frac{2}{998}$ ua/s, soit environ 300 000 km/s.

L’Observatoire de Greenwich a été fondé en 1676 par Flamsted dans le but de déterminer les longitudes terrestres à usages dans la marine. C’est là que, en 1682, Halley calcule, à l’aide des lois de Képler, les éléments de l’orbite de la comète qui porte son nom. Il prédira ainsi son retour en 1759.

Newton (1687) apporte une pierre fondamentale à l’astronomie et plus généralement à la science en posant les principes d’inertie et d’action-réaction, en introduisant la notion d’accélération et donc de force. Il découvre avec Leibnitz le calcul infinitésimal. Ainsi, avec ces principes, ces outils mathématiques et bien sûr sa fameuse loi de la gravitation universelle, il démontre les lois de Képler. Il va même plus loin, puisqu’il calcule quelques perturbations à ce mouvement képlérien notamment dans les mouvements de la Lune et de Jupiter. En effet, le mouvement de la Lune et des planètes n’est pas exactement régi par le problème des deux corps dont sont issues les lois de Képler, mais aussi par toutes les interactions mutuelles entre tous les corps composant le système. Il faut encore noter que Newton a décomposé la lumière blanche en un spectre de couleurs. Il a aussi construit le premier télescope.

Maupertuis (1736) avec Bouguer et La Condamine (1740) ont organisé ou participé à des expéditions qui ont permis de calculer l’aplatissement de la Terre aux pôles.

Laplace (1796) publie son fameux traité de Mécanique Céleste. Il discute de la stabilité du système solaire : en limitant les calculs à l’ordre 2 des masses des planètes

(qui sont des petites quantités comparées à la masse du Soleil), il montre que les demi-grands axes des orbites des planètes n'ont que de petites variations périodiques. Avec Lagrange (1780), ils précisent ce résultat de stabilité. D'ailleurs Lagrange avec Clairaut (1760) développent la mécanique céleste dont le problème des trois corps. Notons enfin que l'étude de la stabilité du système solaire a été reprise récemment par Laskar (1990). Il a trouvé que le système solaire est stable au sens où les planètes ne peuvent entrer en collision pour des durées de l'ordre de la durée de vie du Soleil (10 milliards d'années). Mais les planètes Mercure, Vénus, la Terre et Mars sont quand même affectées par des comportements chaotiques qui empêchent de prédire leurs positions au delà de quelques millions d'années.

1.3.4 La Galaxie (1780,1920)

La structure de la Galaxie a pu être comprise grâce à une meilleure connaissance des distances stellaires et donc d'échapper à la seule notion de sphère céleste. Bessel (1838) et Struve (1840) ont mesuré les premières parallaxes terrestres. Ces mesures sont des mesures directes de distances (sect. 1.2.3). Les mesures indirectes de distances basées sur la luminosité intrinsèque des étoiles ont été possibles grâce aux développements de l'astrophysique : le spectre visible de l'hydrogène (Balmer 1885), la théorie d'atmosphère stellaire (Schwarzschild 1890), la loi de rayonnement des corps noirs (Planck 1906) et le diagramme H-R (Hertzsprung et Russell 1910) qui relie température et la luminosité.

Cette période est aussi la période où de grands catalogues d'étoiles sont établis. Citons :

1888 NGC ("New General Catalogue", 12 000 nébuleuses

1890-1924 HD (225 000) étoiles

, puis plus tard :

1940 FK3 (Fundamental Katalog", 33 342 étoiles avec parallaxes, mouvements propres et températures)

Avec ces catalogues, il apparaît clairement que les constellations ne sont que des groupements apparents d'étoiles. On passe d'un modèle de galaxies où le Soleil est au centre, à un modèle où le Soleil est à 30 000 al du centre galactique.

Après la découverte de bras spiraux dans notre galaxie, Lindblad (1920) explique leur présence par la notion d'ondes de densité.

1.3.5 Les autres galaxies (après 1920)

La construction de nouveaux télescopes (Mont Wilson, 2,5m ; Mont Palomar, 5m) a permis d'observer plus de "nébuleuses". Ces observations, associées à la théorie, permettent de comprendre leur structure.

On a vu (sect. 1.2.3) que Leavitt a établi une relation entre la luminosité intrinsèque et la période des étoiles variables céphéïdes.

Hubble (1923) découvre une céphéïde dans la “nébuleuse” d’Andromède et évalue ainsi sa distance à environ un million d’années lumière : Andromède est donc un objet extragalactique, c’est même une autre galaxie semblable à la notre. Un peu plus tard, en 1929, il découvre que le décalage spectral vers le rouge des galaxies est proportionnel à leur distance. Cette loi s’interprète comme une expansion de l’Univers. Elle permet aussi d’avoir une nouvelle méthode de mesure (indirecte) de distances.

Einstein (1905) publie sa théorie de la relativité restreinte : l’espace de la mécanique est encore un espace euclidien mais sa métrique tient compte de l’invariance de la vitesse de la lumière en associant le temps aux coordonnées spatiales dans un espace à quatre dimensions : l’espace-temps. En 1915, il publie la relativité générale. Cette fois il n’existe plus de repère galiléen ; tous les repères, même en accélération par rapport à un autre, sont équivalents. La topologie de l’espace n’est alors plus euclidienne et dépend de la présence de masses en son sein. La gravitation universelle n’est plus une force en tant que telle mais issue du principe d’inertie : les trajectoires suivent les géodésiques³ de l’espace-temps qui est déformé par la présence des masses.

Cette théorie est à la base du modèle actuel d’Univers avec lequel Gamov (1948) a prédit l’existence du rayonnement fossile du “Big-Bang”. Ce rayonnement a été observé en 1965 par Penzias et Wilson. Ce modèle donne une explication à l’expansion de l’Univers observée par Hubble.

1.4 Le système solaire actuel

Le système solaire est le domaine entourant le Soleil dans lequel son influence gravitationnelle est prépondérante sur celle des étoiles les plus proches et surtout celle du centre galactique. Il correspond sensiblement à une sphère de 200 000 UA de rayon, centrée sur le Soleil et contenant des planètes et leurs satellites, des comètes, des astéroïdes et des poussières interplanétaires.

Le mouvement des différents objets autour du Soleil se fait sur des orbites elliptiques. Lorsqu’on étudie les objets du système solaire, et en particulier leur mouvement, on utilise un repère qui est lié à l’orbite de la Terre à une époque donnée (souvent 1er Janvier 2000, appelé aussi J2000). dans ces conditions une orbite est définie par 5 paramètres (voir Fig. 1.4) :

- 2 paramètres de forme :
 - a : appelé *demi-grand axe*, définit la taille de l’orbite,
 - e : appelé *excentricité*, définit l’allongement de l’orbite,
- 3 paramètres de position :
 - i : appelé *inclinaison*, définit l’inclinaison du plan de l’orbite par rapport au plan de l’orbite de la Terre (*plan de l’écliptique*),

3. Les géodésiques sont les courbes qui minimisent la distance d’un point à un autre. Les géodésiques d’un espace euclidien sont les droites, celles de la sphère sont les grands cercles (voir 2.1 du chapitre 2).

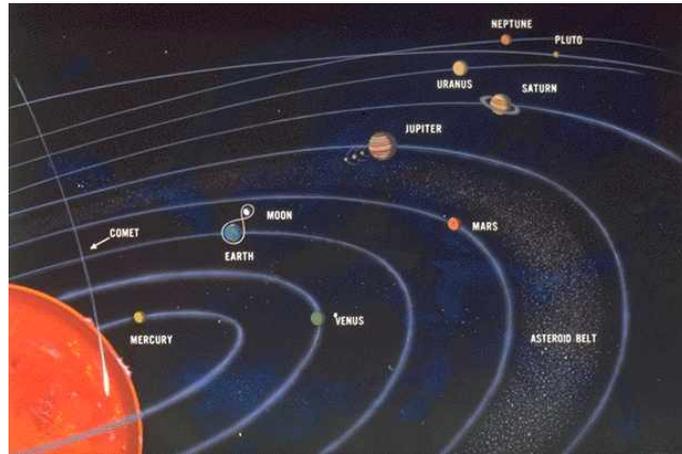


FIGURE 1.3 – Schémas du système solaire

crédit : IMP/CNRS.

- Ω : appelé *longitude du noeud ascendant*, défini la position à laquelle l'objet coupe le plan de l'orbite de la Terre en passant du Sud au Nord,
- ω : appelé *longitude du périhélie* (le *périhélie* est le point de l'orbite le plus proche du Soleil, le point le plus éloigné s'appelle *aphélie*), défini la position du périhélie sur son plan par rapport au noeud ascendant.

Enfin, le corps est repéré sur son orbite par un angle f appelé *anomalie vraie* (angle entre l'objet et le périhélie).

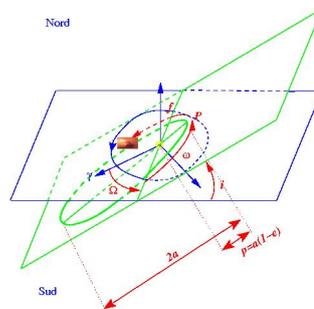


FIGURE 1.4 – Eléments orbitaux d'un objet du système solaire

1.4.1 Les planètes du systèmes solaire

Le mot planètes vient du grec “planêtês” qui signifie “astres errants”. En effet dès l'antiquité une observation attentive du Ciel permettait de voir que tous les points lumineux du ciel étaient fixes sauf 7 : la Lune, Mars, Mercure, Jupiter, Venus, Saturne et le Soleil. Non seulement ces points n'étaient pas fixes mais leur mouvement était régulier et périodique.

Bien qu'Uranus soit visible à l'oeil nu, sa luminosité était trop faible pour lui permettre de rejoindre le groupe de planètes connues. D'autre part, son faible mouvement apparent a fait qu'Uranus a longtemps été considérée comme une étoile. Ce n'est que le 13 mars 1781 que William Herschel annonce sa découverte en tant que planète à l'aide d'un télescope. Uranus devint la 7ème planète du système solaire (l'héliocentrisme étant passé par là). L'étude de son mouvement montra des irrégularités. La mécanique céleste née depuis le principe de la gravitation universelle établi par Newton (1643-1727), permis à Urbain Le Verrier de montrer en 1845, qu'il devait exister une 8ème planète au-delà d'Uranus et il pu même déterminer l'endroit du ciel où la planète devait se trouver. Ainsi Neptune fut découverte, devenant un des premiers grand succès de la mécanique céleste.

Cependant Neptune aussi avait un mouvement qui ne correspondait pas à ce que la théorie prévoyait : on pensa donc à une nouvelle planète. L'acharnement des observateurs leur permis de découvrir finalement Pluton (en 1930 par Clyde Tombaugh). Cependant, en 1978 la découverte de Charon, satellite de Pluton, permis de calculer la masse de Pluton, et montra ainsi que Pluton était trop peu massive pour affecter le mouvement de Neptune. Ce n'est finalement qu'un réajustement des masses des planètes qui permis de résoudre le problème du mouvement de Neptune.

Plus proche du Soleil, le mouvement du périhélie de Mercure posait aussi un problème et ne pouvait être expliqué par l'influence des autres planètes. On supposa alors l'existence d'une planète plus proche encore du Soleil que Mercure et qui devait être pratiquement inobservable. Cette planète, bien que jamais observée pris le nom de Vulcain. En 1916, ce fut finalement les limites de la mécanique céleste qui permirent de résoudre le problème. En effet, l'avancement du périhélie de Mercure s'explique très bien dans le cadre de la relativité générale.

Ainsi, près du Soleil, jusqu'à une trentaine d'unités astronomiques, le système solaire comporte essentiellement 8 planètes qui tournent toutes dans le même sens autour du Soleil sur des orbites quasi-circulaires et quasi-coplanaires. Ces 8 planètes sont classées en deux groupes :

- 4 planètes dites *telluriques*, dans l'ordre d'éloignement au Soleil : Mercure, Vénus, la Terre et Mars. Leur densité moyenne est élevée (de 3,96 à 5,52) mais étant très petites, ce sont des planètes peu massives ; elles possèdent toutes une surface solide ou croûte, recouvrant un manteau de silicates et un noyau de fer, mais, sauf pour la Terre, on ne connaît pas bien leur extension ni leur état.
- 4 planètes *gazeuses* ou planètes *géantes* : Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune, qui ont une densité moyenne faible (de 0,7 à 1,5), mais à l'inverse des planètes telluriques, elles sont de très grande taille donc elles sont massives ; elles sont formées essentiellement d'hydrogène et d'hélium, comme le Soleil. Elles ne possèdent pas de surface solide. Leur atmosphère est marquée par la présence de nuages plus ou moins colorés par des molécules carbonées ou azotées. Ces 4 planètes ont aussi la particularité d'être entourées d'un système d'anneaux plus ou moins complexes, ainsi que de nombreux satellites.

| Planète | a | R | P | T | densité | masse | i | e |
|----------|-------|--------|---------|-----------|-----------------------------------|------------------|-----------------|-------|
| Planète | (UA) | (km) | (année) | (sideral) | ($\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$) | (M_{\oplus}) | ($^{\circ}$) | |
| Mercure | 0,39 | 2 440 | 0,24 | 58j16h | 5,13 | 0,056 | $7,00^{\circ}$ | 0,206 |
| Venus | 0,72 | 6 052 | 0,62 | -243j | 4,97 | 0,817 | $3,39^{\circ}$ | 0,007 |
| Terre | 1,00 | 6 378 | 1 | 23,93h | 5,52 | 1 | $0,00^{\circ}$ | 0,017 |
| Mars | 1,52 | 3 397 | 1,88 | 24,62h | 3,94 | 0,108 | $1,85^{\circ}$ | 0,093 |
| Jupiter | 5,20 | 71 492 | 11,86 | 9,92h | 1,33 | 318 | $1,30^{\circ}$ | 0,048 |
| Saturne | 9,54 | 60 268 | 29,46 | 10,65h | 0,69 | 95,2 | $2,49^{\circ}$ | 0,054 |
| Uranus | 19,19 | 25 559 | 84,01 | -17,24h | 1,56 | 14,6 | $0,77^{\circ}$ | 0,047 |
| Neptune | 30,07 | 24 764 | 164,79 | 16,11h | 2,27 | 17,3 | $1,77^{\circ}$ | 0,000 |
| (Pluton) | 39,48 | 1 151 | 247,69 | -152,29h | 2 | 0,002 | $17,14^{\circ}$ | 0,249 |

FIGURE 1.5 – Les planètes en chiffres. a : demi grand-axe, R : rayon, P : période autour du Soleil, T : période de rotation, i : inclinaison par rapport à l'écliptique, e : excentricité.

On va maintenant décrire succinctement les planètes.

Mercure

Petite planète très proche du Soleil, elle n'avait été visitée que par la sonde Mariner 10 en 1974 (voir Fig. 1.6), mais récemment la sonde Messenger est allée se positionner sur une orbite autour de Mercure afin de pouvoir étudier entre autre l'intérieur de la planète. Mercure n'a pas d'atmosphère et montre une surface complètement cratérisée, cicatrices des multitudes d'impacts météoritiques subis lors de sa formation et qui subsistent encore en l'absence d'érosion.

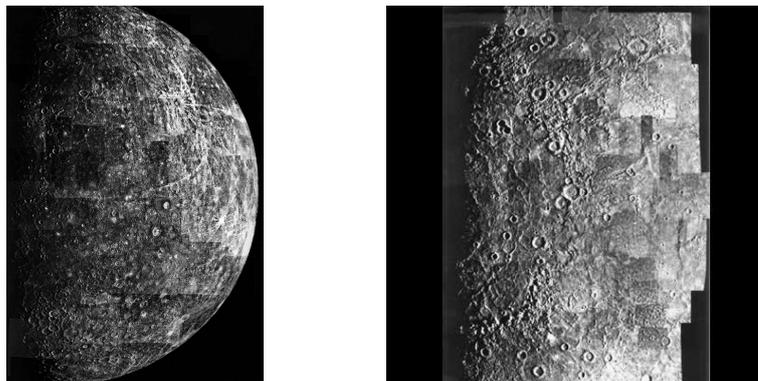


FIGURE 1.6 – Mercure vue par Mariner 10. A droite, le bassin Caloris crédit : NASA

Mercure tourne très lentement sur elle-même (en 58,66 jours terrestres), mais cette période, combinée avec la période orbitale de 88 jours, donne une durée du jour mercurien égale à 176 jours. De cette durée et de la proximité du Soleil, les températures sont très contrastées : de -170°C la nuit à $+430^{\circ}\text{C}$ le jour. L'équateur de mercure est très incliné par rapport à son plan orbital.

Vénus

De taille comparable à la Terre, Vénus a une atmosphère très dense et très étendue contenant 96% de gaz carbonique et 3,5% d'azote et donnant une pression énorme de 93 bars au niveau du sol ; elle est surmontée de nuages élevés d'acide sulfurique ; le gaz carbonique provoque un effet de serre intense qui porte à 450 °C la température au sol ! Ce dernier n'est pas observable directement, caché en permanence par les nuages. Malgré ces conditions extrêmes, le sol de Vénus a été atteint par plusieurs sondes russes de la série Venera vers 1980, qui ont renvoyé des images d'un sol caillouteux. Le relief de Vénus a aussi été cartographié par un radar satellisé (sonde Magellan, voir Fig. 1.7) en 1990, montrant en particulier des volcans apparemment non actifs actuellement, avec des dômes et des coulées de laves basaltiques, et aussi des grands cratères d'impact. A l'occasion de cette cartographie on a pu aussi établir que la rotation du sol de Vénus s'effectue en 243 jours alors que la circulation nuageuse montre une période de rotation de 4 jours (ces 2 rotations s'effectuent paradoxalement dans le sens opposé au mouvement orbital). En 2005 la sonde Venus-express a été envoyée vers Venus.

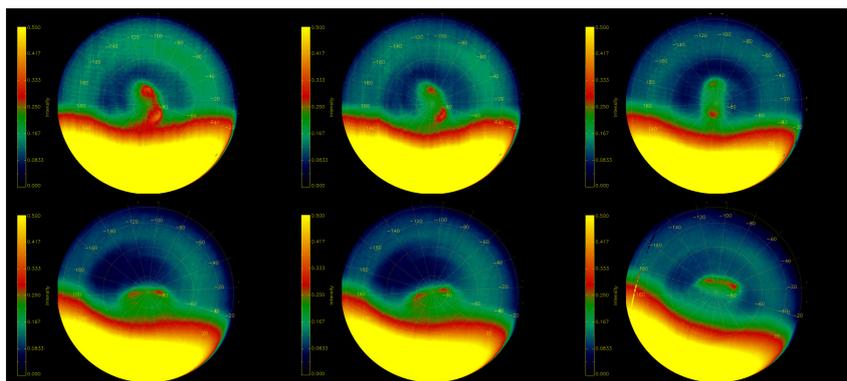


FIGURE 1.7 – En haut : Venus vu par un radar de la sonde Magellan (crédit : NASA) ; en bas : le vortex au pôle sud de Venus vue par la sonde Venus Express (crédit : ESA)

La Terre

Les caractéristiques internes sont supposées suffisamment connues pour ne pas être rappelées ici, elle se distingue cependant par le fait qu'elle semble être la seule planète du système solaire à posséder en permanence à sa surface de l'eau sous forme liquide, avec une atmosphère moyennement dense composée essentiellement d'azote et d'oxygène. Son satellite naturel, la Lune, est un petit corps comparable à la planète Mercure, dépourvu comme lui d'atmosphère, et présentant un sol complètement cratérisé. La Lune tourne sur elle-même dans le même temps qu'elle tourne autour de la Terre (rotation synchrone en 27,3 jours), présentant ainsi toujours la même face vers la Terre. La face visible est caractérisée par des grands bassins sombres entourés de zones plus claires montagneuses et fortement cratérisées ; ces bassins, appelés mers, sont en fait d'anciens cratères d'impact, gigantesques, qui se sont formés il y a plus de 3,5 milliards d'années et submergés alors d'une lave basaltique maintenant recouverte d'une épaisse couche de poussières. La face cachée possède paradoxalement très peu de mers.



FIGURE 1.8 – La Terre et la Lune crédit : NASA

La Lune est aussi responsable des marées. En fait ce phénomène s'explique par une différence de la force d'attraction de la Lune de part et d'autre de la Terre : la résultante de la force centrifuge et la force gravitationnelle due à la Lune en deux points de la Terre diamétralement opposé va avoir des amplitudes différentes, engendrant une déformation de la Terre (voir Fig. 1.9).

De plus la Terre tourne sur elle-même ce qui va engendrer une déformation continue du globe terrestre, le bourrelet dû à la marée va être en avance sur la position de la Lune (la Terre tourne plus vite sur elle-même que la Lune tourne autour de la Terre), ainsi la Lune va aussi exercer une force de rappel conduisant à un ralentissement de la rotation de la Terre et à un éloignement de la Lune par rapport à la Terre.

Mars

Deux fois plus petite que la Terre, elle a une atmosphère composée de 95,3% de gaz carbonique, de 2,7% d'azote et un peu d'argon, mais sa pression au sol est très faible (7 millibars) ; elle est suffisante quand même pour que des tempêtes soulèvent et

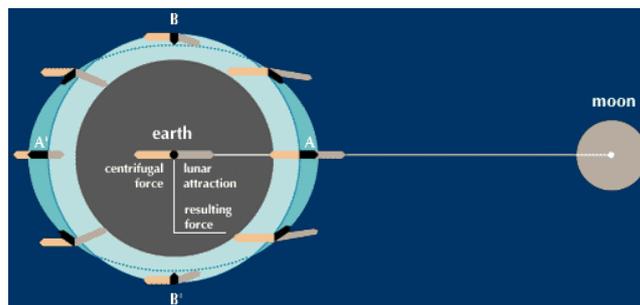


FIGURE 1.9 – Force de marée dues à la Lune.

déplacent parfois des nuages de sable. Sa rotation sur elle-même en 24,5 heures autour d'un axe incliné de 25 ressemble à celle de la Terre, produisant des saisons analogues mais durant chacune 6 mois environ. Néanmoins, la température à l'équateur varie quotidiennement entre 0 et -70 C. Le sol est criblé de cratères météoritiques mais on y voit aussi plusieurs grands volcans non actifs, dont Olympus mons : le plus grand volcan du système solaire. Des canyons montrent des traces d'écoulements anciens et des zones d'effondrement qui indiquent que de l'eau gelée existe en grande quantité dans le sous-sol, ces effondrements pouvant être provoqués par un dégel épisodique. Des calottes polaires faites de givre de CO₂ croissent et décroissent au rythme des saisons. Plusieurs missions (Viking en 1976, Pathfinder en 1996) ont révélé un sol de sable parsemé de cailloux rougâtres composés notamment d'oxydes de fer. 2 petits satellites, Phobos et Deimos, tournent autour de Mars, probablement issus de la ceinture d'astéroïdes que l'on verra plus loin.

Jupiter

C'est un astre énorme, 318 fois plus massif que la Terre. C'est une planète dont l'influence gravitationnelle est non négligeable sur toutes les autres planètes et sur le Soleil. Elle tourne sur elle-même en moins de 10 heures, cette rotation étant différentielle : plus lente aux pôles qu'à l'équateur. La circulation atmosphérique de Jupiter est complexe, montrant notamment un énorme cyclone permanent de près de 15 000 km de diamètre (appelé "la grande tache rouge"), probablement lié à l'action intense du champ magnétique jovien ; celui-ci crée une magnétosphère immense s'étendant sur près de 7 millions de km et est à l'origine aussi d'un puissant rayonnement radio. Jupiter a en outre la particularité d'émettre d'avantage d'énergie rayonnante qu'il n'en reçoit du Soleil ; peut-être Jupiter est-il encore en train de se contracter (au rythme de 1mm/an?). Enfin, Jupiter est entourée d'une trentaine de satellites, dont 4 gros découverts par Galilée en 1610 et appelés depuis "satellites galiléens" : ce sont Io, Europe, Ganymède (le plus gros satellite du système solaire, et même plus gros que la planète Mercure) et Callisto. Ces satellites sont autour de Jupiter comme dans un système solaire en miniature, formés probablement en même temps que Jupiter.

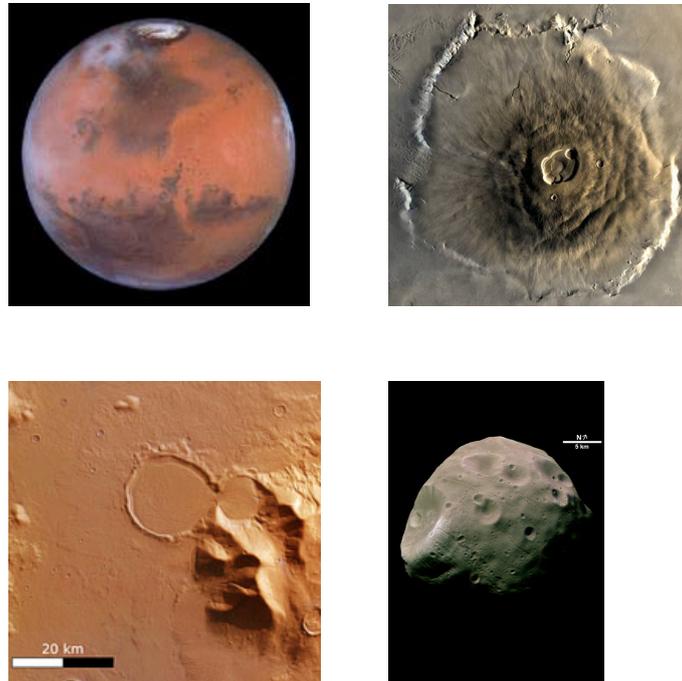


FIGURE 1.10 – Mars et sa calotte (en haut à gauche), Olympus-Mons (en haut à droite), écoulement de galcier rocheux dans des cratères d’impacts (en bas à gauche) et le satellite Phobos (en bas à droite) crédit : ESA/NASA

Ce système a été visité par les sondes Pioneer (1975), Voyager (1979) et Galileo (1996) ; cette dernière, placée en orbite autour de Jupiter, a observé de près le système Jovien, jusqu’à la fin de sa mission en Septembre 2003. Cela a permis de découvrir sur Io une activité volcanique inattendue mais intense, due à l’échauffement provoqué probablement par les marées que Jupiter soulève sur ce petit satellite, désormais recouvert d’éjectats de soufre et de dioxyde de soufre ; d’ailleurs, l’anneau de Jupiter pourrait bien être alimenté par ce volcanisme de Io. Les autres satellites semblent être un mélange de glaces d’eau et de roches, avec même sur Europe, des indices de l’existence d’un océan liquide sous-jacent à une épaisse couche de glace dont l’aspect fracturé fait penser à une banquise ayant subi de multiples débâcles.

Saturne

C’est la plus spectaculaire avec son système d’anneaux équatoriaux. Elle présente une surface moins contrastée que celle de Jupiter, mais sa rotation différentielle (en 10,25 heures à l’équateur) entraîne des zones de turbulences analogues. Les anneaux sont en fait une multitude de très petits satellites composés essentiellement de glace d’eau et d’ammoniac, dont les plus gros ne dépassent pas quelques dizaines de mètres.



FIGURE 1.11 – Jupiter, Io et la grande tâche de Jupiter crédit : NASA/HST

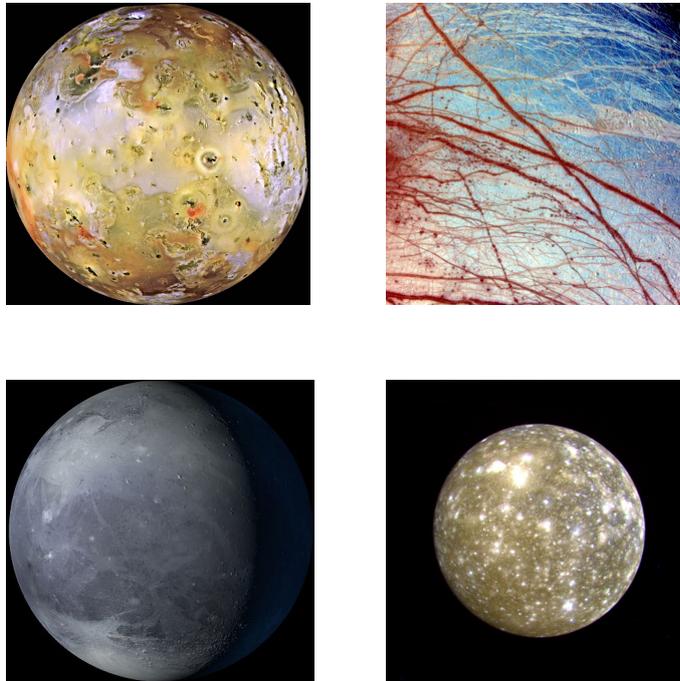


FIGURE 1.12 – Les Galiléens : Io, Europe, Ganimède et Callisto crédit : NASA

Ce sont probablement les débris d'un objet trop gros pour résister aux forces de marée rencontrées lors d'une approche à moins de 2,45 rayons de la planète (limite de Roche) et qui l'ont fait exploser. Certaines zones de l'anneau sont dépeuplées (par exemple la division de Cassini), à cause des effets de résonances gravitationnelles dues au satellite le plus proche, Mimas.

Parmi la trentaine de satellites connus orbitant Saturne (dont 10 découverts par les sondes Voyager en 1981 et 12 récemment), Titan est le plus gros ; il est même plus gros aussi que la planète Mercure, avec cette particularité unique pour les satellites,

d'avoir une atmosphère dense au point de ne pas laisser voir sa surface ; c'est une atmosphère riche en azote avec un peu d'argon et de méthane. La sonde Cassini, lancée en 1997, s'est satellisée autour Saturne en Juillet 2004 afin d'explorer pendant plusieurs années l'ensemble du système saturnien.

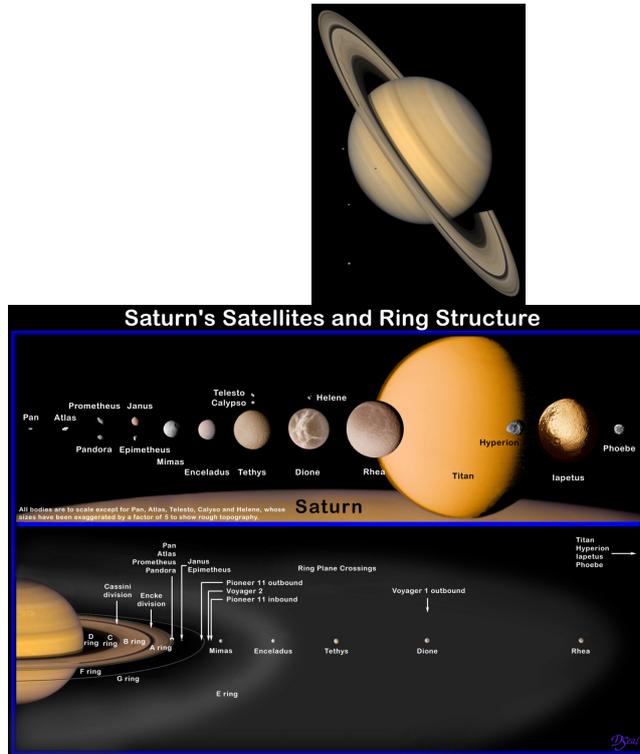


FIGURE 1.13 – Saturne et ses satellite

crédit : NASA/JPL/Caltech

Uranus

Elle est singulière car son axe de rotation est quasiment couché dans le plan de son orbite autour du Soleil. Elle tourne sur elle-même autour de cet axe en près de 18 heures, mais cet axe, du fait de sa direction fixe, présente alternativement ses pôles vers le Soleil pendant un jour polaire interminable de 42 ans et suivi d'une nuit polaire toute aussi longue. Une vingtaine de satellites (dont 10 découverts par la sonde Voyager 2 en 1986), tournent autour d'Uranus dans son plan équatorial, quasiment perpendiculaire au plan orbital. Le plus proche d'Uranus, Miranda, a été survolé de près par Voyager 2, montrant en détails une surface chaotique avec failles, rides, vallées et cratères dont l'origine est encore inexpliquée. Enfin Uranus est entouré d'un système de 9 anneaux extrêmement étroits et composés de grosses particules sombres, difficilement visibles ; l'un de ces anneaux semble être confiné entre les orbites de 2 petits satellites, appelés pour cela "satellites bergers".

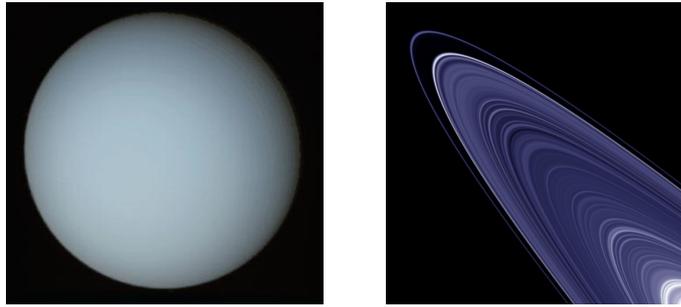


FIGURE 1.14 – Uranus et ses anneaux

Neptune

Elle ressemble beaucoup à Uranus tant pour sa structure interne que pour son atmosphère, mais sa couleur bleutée plus intense que celle d'Uranus est sans doute due à une proportion plus grande de méthane gazeux qui absorbe les radiations rouges. Elle tourne sur-elle même en un peu plus de 16 h, et laisse apparaître une grande tache sombre de 10000 km de diamètre, peut-être analogue à la grande tache rouge de Jupiter. Des vents violents de plus de 1000 km/h sont alimentés par une énergie interne encore non expliquée. Neptune possède aussi 3 anneaux, mais dont la densité n'est pas constante, produisant une apparence d'arcs brillants espacés de parties sombres. La stabilité d'une telle structure est encore difficile à comprendre. Sur les 8 satellites connus, 6 furent découverts par Voyager 2 en 1989. Survolé par cette sonde, Triton, le plus gros de ces satellites, a révélé une atmosphère ténue (10 microbars) et un sol rocheux couvert d'eau, d'azote et de méthane gelés (température - 236), avec des indices de phénomènes "criovolcaniques" liés à des changements de phase produits dans ces conditions physiques extrêmes : de l'azote gazeux sous pression jaillirait et retomberait en geysers de cristaux glacés. L'atmosphère de Triton contient du méthane et surtout de l'azote ; ce serait ainsi le 3ème corps du système solaire, avec Titan et la Terre, à posséder une atmosphère riche en azote.

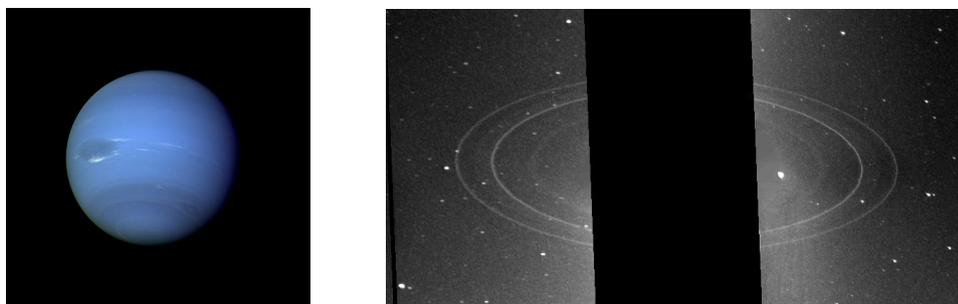


FIGURE 1.15 – Neptune et ses anneaux

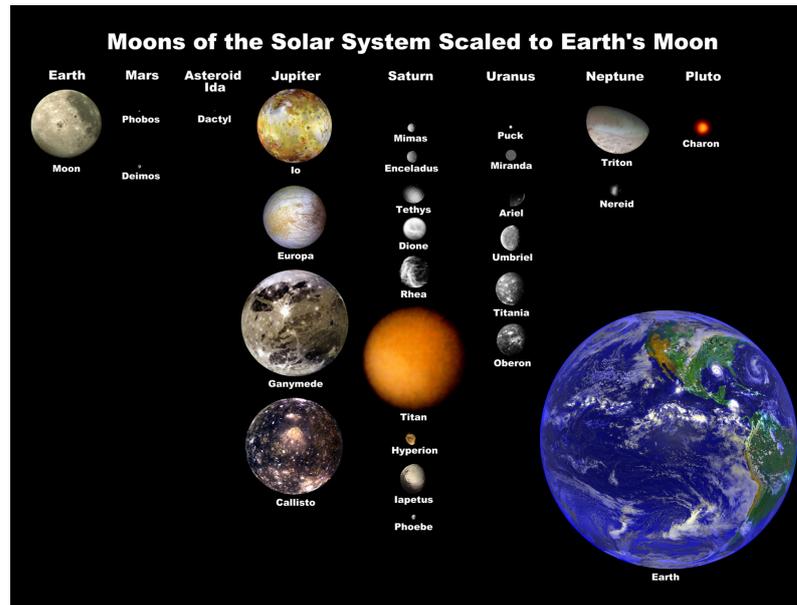


FIGURE 1.16 – Les principaux satellite du système solaire en taille relative
Wikimedia

crédit :

1.4.2 Les autres composants du système solaire

En dehors des huit planètes de système solaire, le système solaire contient essentiellement deux autres catégorie d'objets :

- les astéroïdes,
- les comètes.

Les astéroïdes

Les astéroïdes se trouvent principalement entre l'orbite de Mars et de Jupiter et constituent la ceinture d'astéroïdes. Il s'agit d'une multitude de très petits corps rocheux, dont le plus gros, Cérés fait moins de 900 km de diamètre ; près de 40 000 de ces petites planètes sont actuellement répertoriées, ayant des dimensions supérieures à quelques kilomètres pour les plus petits, mais on estime qu'il y aurait plus de 500 000 de ces objets dont la taille dépasserait 1,6 km. Leur masse totale ne dépasserait pas 3/1000 de la masse de la Terre. Ils tournent tous dans le même sens que les planètes autour du Soleil, mais leurs orbites sont davantage excentrées et inclinées. La forme de ces astéroïdes ainsi que leur densité laissent supposer qu'ils se sont formés par accréation ou parfois par fragmentations dues à des collisions mutuelles. La sonde Near s'est satellisée en 2001 autour de l'astéroïde Eros et, après plusieurs mois d'observations rapprochées, s'est posée en douceur à sa surface. En fait, les astéroïdes seraient les résidus de petites "proto-planètes" qui auraient dû se former entre Mars et Jupiter, mais qui se sont heurtées et fragmentées ; le voisinage de la

très influente planète Jupiter n'aurait pas permis de stabiliser ces petits corps dans cette zone du système solaire. Certains de ces astéroïdes ont pu approcher Mars ou Jupiter et être capturés par ces planètes, devenant alors leurs satellites. D'autres ont des orbites les amenant à heurter ces planètes ou même la Terre, se transformant alors en matériau météoritique. L'étude des météorites permet ainsi de connaître la nature des astéroïdes, témoins peu dégradés de la condensation de la nébuleuse proto-solaire : 90% des météorites sont de nature rocheuse ; d'autres météorites dites métalliques (10%) sont presque exclusivement formées de fer et de nickel.

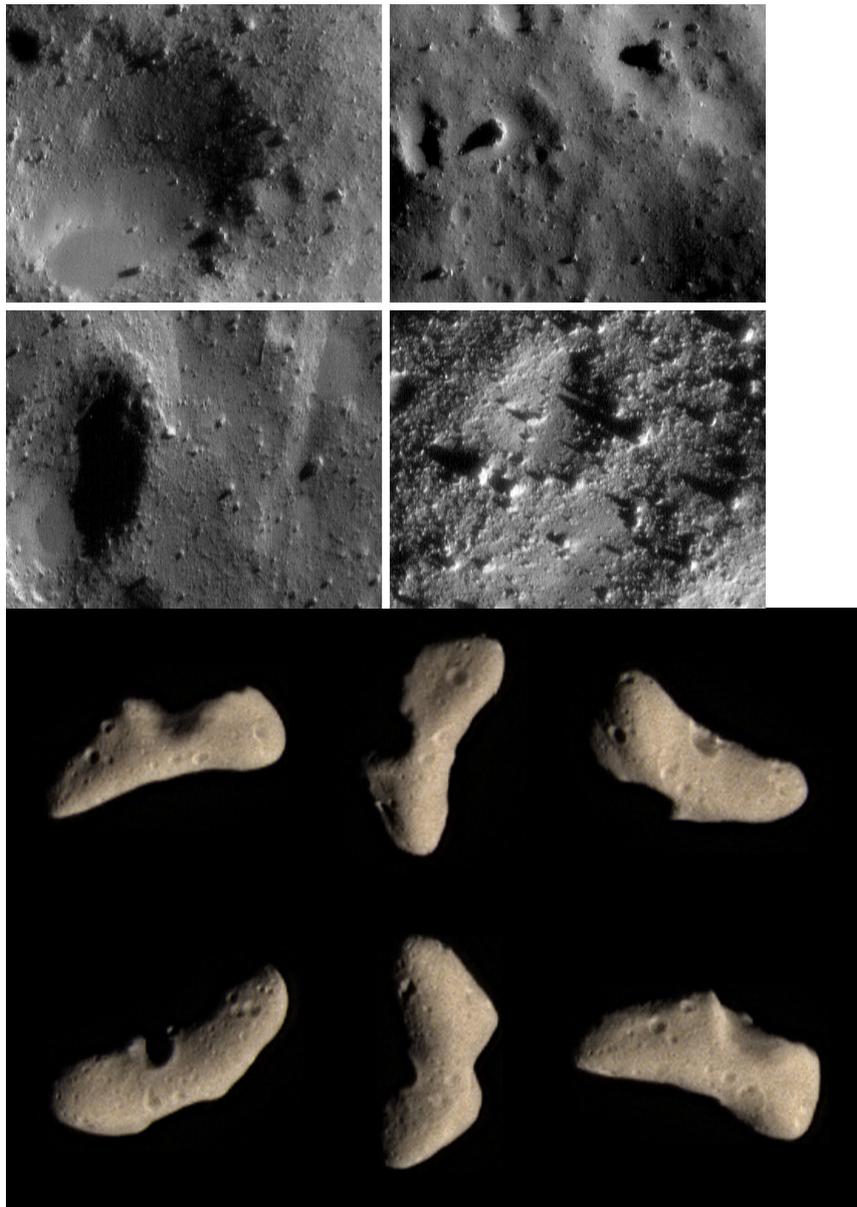


FIGURE 1.17 – L'astéroïde Eros vu par la sonde Near crédit : NASA

La structure de la ceinture d'astéroïdes est particulièrement complexe. Elle a été sculptée par les perturbations des différentes planètes, en particulier des résonances de mouvement avec Jupiter, engendrant des lacunes (gap) dans la ceinture (voir Fig. 1.18).

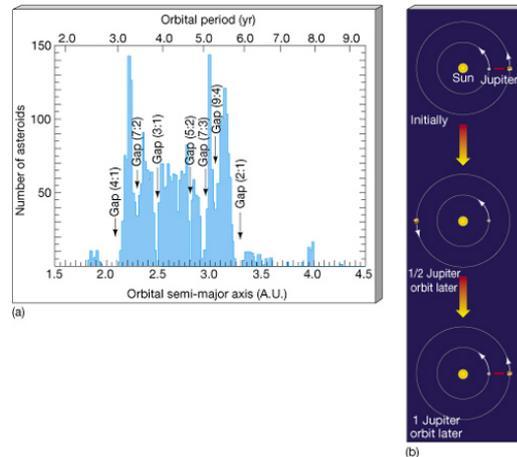


FIGURE 1.18 – Les lacunes de la ceinture d'astéroïdes

Les comètes

Le second groupe d'objet sont les comètes. Les comètes sont des résidus presque intacts de la formation du système solaire. En effet, on les connaît car certains de ces petits corps (ou noyaux cométaires) deviennent visibles lorsque leur orbite les amène à se rapprocher suffisamment du Soleil (souvent à moins de 3 UA) : leur réchauffement provoque la sublimation des glaces présentes à leur surface, formant alors une atmosphère autour du noyau ; cette atmosphère est éjectée du noyau par la pression de radiation de la lumière solaire, formant alors une queue (ou chevelure de la comète) dans la direction opposée au Soleil. La quantité de glace étant limitée, les comètes qui éjectent encore de la matière sont donc relativement récentes et viennent probablement d'autres régions plus froides du système solaire.

La sonde Giotto, qui a rencontré la comète de Halley en 1986, a révélé un noyau de 10 km de diamètre ressemblant à une grosse "boule de neige sale". Le dégazage d'une comète produit des gaz et des poussières qui sont dispersés dans la chevelure sur des distances pouvant atteindre plusieurs centaines de millions de km. Les gaz sont essentiellement des molécules ionisées de CO^+ , OH^+ , ou neutres N_2 , CO_2 . Ce dégazage ne se fait pas de manière symétrique, il s'agit en générale de petite portion de la comète qui va éjecter de la matière.

L'origine des comètes pose problème puisqu'elles ont une durée de vie limitée et qu'on en observe continuellement. En 1951, Edgeworth et Kuiper ont montré de manière indépendante qu'il devrait exister un disque d'objet au delà de l'orbite de

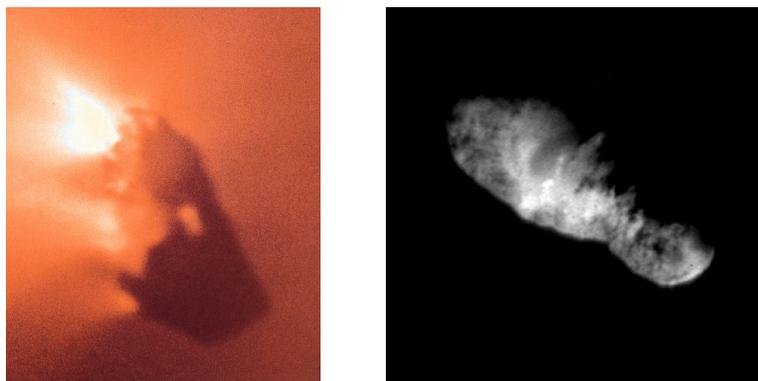


FIGURE 1.19 – La comète de Halley et la comète Borrelly crédit : ESA/NASA

Neptune. Cette région, qui pris le nom de ceinture de Edgeworth-Kuiper ou ceinture de Kuiper, est une région source probable de certaines comètes (voir fig. 1.20, et fig. 1.21).

Depuis 1992, de nombreux objets, appelés aussi transneptuniens ont été observés dans cette région entre 30 UA et 150 UA. Le premier d'entre eux est Pluton, mais on connaît actuellement plus d'un millier de naines glacées dans cette zone, de rayons supérieurs à 100 km, et l'on pense qu'il y aurait encore plusieurs millions de ces petits corps à découvrir. Comme Pluton, ces corps sont des blocs de glaces mélangés probablement à des roches, vestiges condensés de la nébuleuse primitive à l'origine du système solaire.

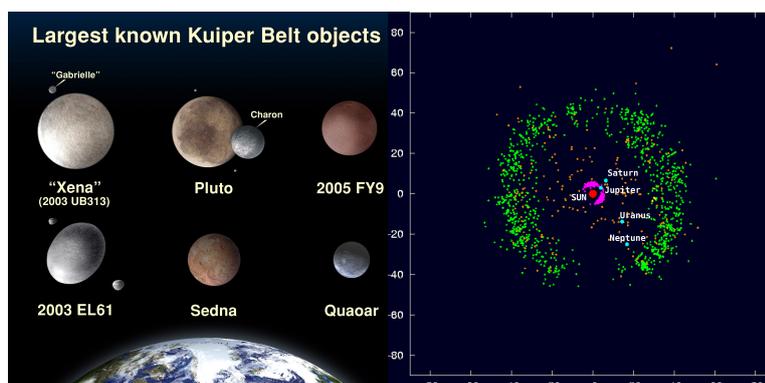


FIGURE 1.20 – A gauche : les objets les plus gros de la ceinture de Kuiper (crédit : NASA/ESA); à droite : position des objets connus dans le système solaire au-delà de l'orite de Jupiter (crédit : MPC)

Enfin, très loin du Soleil, au delà de cette ceinture et jusqu'aux quelques 200 000 UA qui limitent la sphère d'influence du Soleil, on trouve un halo sphérique où la matière est probablement condensée en des milliards de très petits corps glacés,

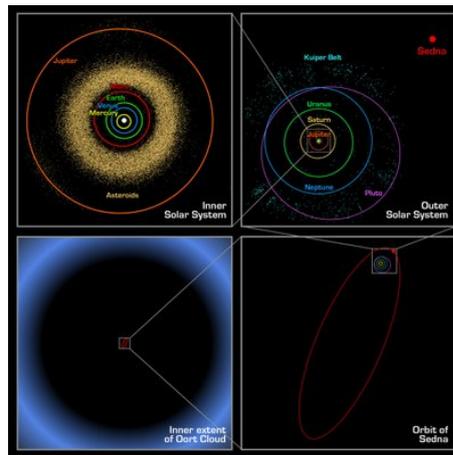


FIGURE 1.21 – Le système solaire à différentes échelles

mélanges de glaces et de roches, formant le nuage de Oort (voir 1.22). Ce nuage n'a jamais été observé et son existence est déduite de modèle dynamique et de la forme des orbites des comètes observées. Les comètes du nuage de Oort ont probablement été éjectées par les perturbations des planètes dans cette région. Elles sont alors sous l'influence aussi de la galaxie et des étoiles proches du Soleil.

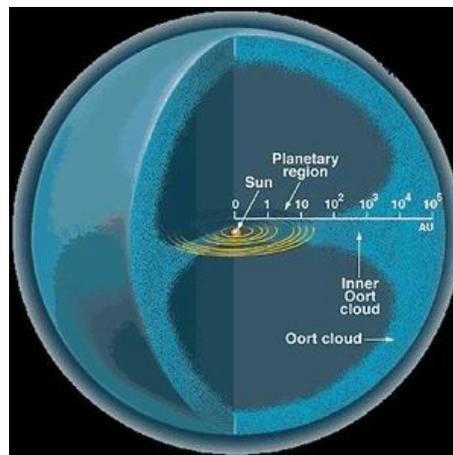


FIGURE 1.22 – Le nuage de Oort crédit : Zeta Janus

Chapitre 2

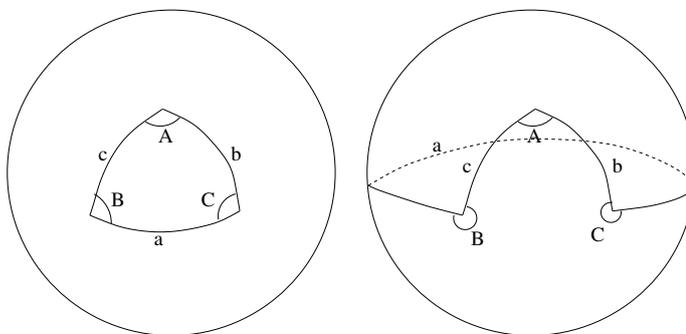
Coordonnées sur la sphère céleste

2.1 Trigonométrie sphérique

Soit une sphère dont le rayon est fixé arbitrairement à 1 et appelons O le centre de cette sphère¹.

L'intersection de tout plan passant par O avec cette sphère est un *grand cercle*. Ces courbes sont les géodésiques de la sphère (voir 1.3.5).

Un *triangle sphérique* est la figure formée par trois arcs de grand cercle reliant 2 à 2, trois points distincts A , B , et C .



On définit les cotés par :

$$a = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \quad b = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) \quad c = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$$

et les angles par :

$$\begin{aligned} A &= \text{angles des plans } OAB \text{ et } OAC \\ B &= \text{angles des plans } OBC \text{ et } OAB \\ C &= \text{angles des plans } OAC \text{ et } OBC \end{aligned}$$

1. En trigonométrie sphérique, cette sphère joue un rôle similaire au cercle de rayon 1 en trigonométrie plane.

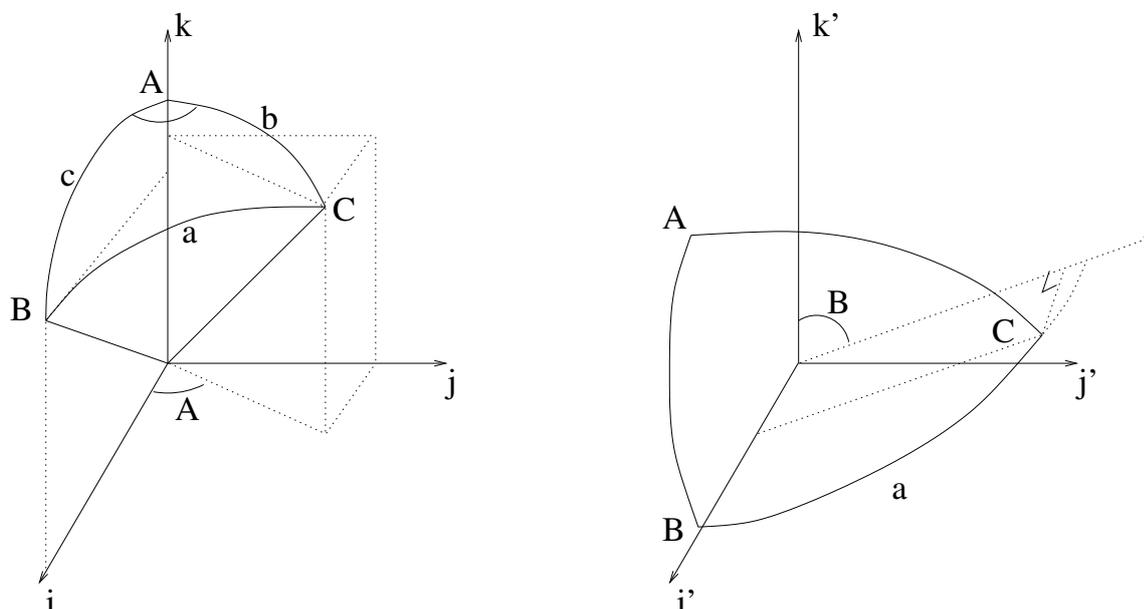


FIGURE 2.1 – Coordonnées des trois points d'un triangle sphérique dans deux repères différents afin d'établir les relations de Gauss.

Pour simplifier l'exposé, on suppose que a, b, c, A, B et C sont différents de 0 et de π . Ce qui signifie que les points A, B et C ne sont pas sur un même grand cercle.

Pour trois points A, B et C donnés, il y a $2 \times 2 \times 2$ triangles sphériques possibles. Mais il n'y en a qu'un pour lequel tous les cotés sont compris entre 0 et π , c'est le *triangle sphérique simple*.

La donnée de 3 nombres (par exemple A, b et c) suffit à déterminer un triangle sphérique. Établissons les *relations de Gauss* qui permettent de résoudre un triangle sphérique.

Rapportons l'espace affine euclidien au repère orthonormé direct $(Oijk)$. Sans nuire à la généralité du problème, on peut choisir ce repère de telle manière que $\overrightarrow{OA} = k$ et que B soit dans le plan (Oik) . On a alors (fig. 2.1) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= (0 && 0 && 1) \\ \overrightarrow{OB} &= (\sin c && 0 && \cos c) \\ \overrightarrow{OC} &= (\sin b \cos A && \sin b \sin A && \cos b) \end{aligned}$$

Considérons maintenant un autre repère $(Oi'j'k')$ orthonormé direct tel que $\overrightarrow{OB} = i'$. Le point A est alors dans le plan $(Oi'k')$. Ce nouveau repère se déduit du précédent par la rotation d'axe (Oj) et d'angle $c - \frac{\pi}{2}$. Si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sont les coordonnées d'un point dans le premier repère, alors les coordonnées de ce point dans le nouveau repère sont

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(c - \frac{\pi}{2}) & 0 & -\sin(c - \frac{\pi}{2}) \\ 0 & 1 & 0 \\ +\sin(c - \frac{\pi}{2}) & 0 & \cos(c - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Déterminons alors les coordonnées de C dans le repère $(O'i'j'k')$ de deux manières différentes :

1. par la lecture directe dans ce repère (fig. 2.1) : $C \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \sin B \\ \sin a \cos B \end{pmatrix}$

2. en utilisant la matrice de passage :

$$\begin{pmatrix} \sin c & 0 & \cos c \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos c & 0 & \sin c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin b \cos A \\ \sin b \sin A \\ \cos b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin b \sin c \cos A + \cos b \cos c \\ \sin b \sin A \\ -\cos c \sin b \cos A + \cos b \sin c \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi les relations de Gauss :

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \sin a \sin B = \sin b \sin A \\ \sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \end{array}}, \quad (2.1)$$

et des relations équivalentes par permutations circulaires.

On peut montrer que la surface d'un triangle sphérique est

$$S = A + B + C - \pi \quad (2.2)$$

(par exemple : si $A = B = C = \frac{\pi}{2}$, on a $S = \frac{\pi}{2}$ qui correspond bien à 1/8 de la sphère).

Remarque sur les triangles plans :

Dans un triangle plan on a $A+B+C = \pi$ c'est à dire, si on l'identifie à un triangle sphérique, $S = 0$. Ainsi un triangle plan peut s'identifier à un triangle sphérique sur une sphère de rayon ∞ , ou à un triangle sphérique dont a , b et c sont des infiniment petits.

Par exemple, la première des relations de Gauss s'écrit :

$$1 - \frac{a^2}{2} \simeq (1 - \frac{b^2}{2})(1 - \frac{c^2}{2}) + bc \cos A$$

qui devient, en ne gardant que le terme principal :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

De la même manière, la deuxième relation devient :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

2.2 Système de coordonnées sur la sphère

La notion de sphère céleste est issue du fait que, à un lieu donné et à une date donnée, l'observateur n'a pas accès à la distance entre lui et l'objet céleste (voir 1.2.3 du chapitre 1). Ainsi, cet observateur peut très bien considérer que tous ces objets sont à une distance arbitraire. Il peut aussi considérer qu'ils sont à une *même* distance (arbitraire elle aussi). De manière équivalente, on peut dire que l'observateur n'appréhende que les directions issues de sa position. Or l'ensemble de ces directions s'identifie à une sphère centrée sur ce point. Chaque direction correspond alors à un point de la sphère.

Sur la sphère céleste, on distingue la sphère locale et la sphère des fixes :

- la *sphère locale* est liée au lieu géographique de l'observateur. Cela signifie que son horizon est “physiquement” un grand cercle de cette sphère et la verticale du lieu correspond à une direction fixe appelée Zénith ;
- la *sphère des fixes* est liée à la figure indéformable constituée par les images des étoiles sur la sphère céleste.

Ces deux sphères se superposent et l'un des buts de l'astrométrie est de décrire le mouvement de l'une par rapport à l'autre.

Sur une sphère, un système de coordonnées est un jeu de deux nombres qui positionnent tout les points de la sphère. Il est naturel de les prendre parmi les coordonnées sphériques λ et φ (définies au travers des coordonnées cartésiennes par $x = r \cos \lambda \cos \varphi$, $y = r \sin \lambda \cos \varphi$ et $z = r \sin \varphi$). On a besoin pour cela de bien définir les origine de chaque coordonnées, et le sens de variation.

On définit un système de coordonnées sphérique de la manière suivante :

- un *pôle positif* P sur la sphère. On a alors le pôle opposé P' diamétralement opposé à P sur la sphère. La droite (PP') définit l'axe des pôles, et l'intersection du plan perpendiculaire à l'axe des pôles passant par le centre de la sphère définit un grand cercle appelé *grand cercle origine*.
- on appelle *méridien* tout demi-grand cercle passant par l'axe des pôles. On définit alors un méridien origine et un sens de rotation positif sur le grand cercle origine autour de l'axe des pôles.

Soit G , l'intersection du méridien origine avec le grand cercle origine. Soit E la direction d'une étoile sur la sphère et H l'intersection du méridien passant par E avec le grand cercle origine. On définit les coordonnées sphérique de E par :

- une *longitude* correspondant à l'angle \widehat{GOH} compté positivement dans le sens positif choisi sur le grand cercle origine ;
- une *latitude* correspondant à l'angle \widehat{HOE} compté positivement vers le pôle positif.

Par exemple sur la Terre, le grand cercle origine est l'équateur et l'origine sur ce grand cercle est définie par le méridien (ou demi-grand cercle) origine passant par

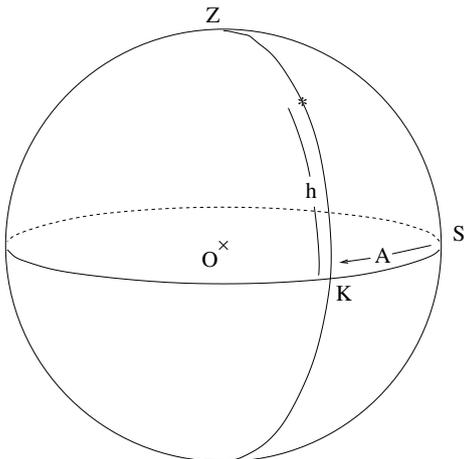
Greenwich². L'orientation de l'équateur terrestre est donnée par la convention que les longitudes sont comptées positivement vers l'est³.

2.3 Coordonnées locales

Elles correspondent au repère naturel que nous utilisons dans la vie courante : l'horizon est un grand cercle et nous sommes au centre O de la sphère. On prend donc ce grand cercle comme grand cercle origine. Le pôle positif correspondant est appelé Zénith (Z). Le méridien origine est le méridien passant par la direction du Sud. Le sens positive correspond au sens indirect. Dans l'hémisphère nord cette direction correspond à la direction dans laquelle culmine le Soleil dans son mouvement diurne.

Une étoile est repérée par :

- la longitude, appelée *azimut* et noté A , mesurée habituellement entre 0° et 360° dans le sens indirect ;
- la latitude, appelée *hauteur* et notée h , mesurée entre -90° et $+90^\circ$.



On peut parfois utilisée la distance zénithale z plutôt que la hauteur. Elle correspond à l'angle \widehat{ZOE} et est mesurée entre 0° et 180° .

Ces coordonnées sont facilement accessibles lorsqu'on observe un astre. Mais elles ont l'inconvénient majeur d'être dépendantes du lieu et de l'instant d'observation. Elles sont donc faciles d'accès mais de peu d'intérêt si on veut échanger des observations.

2. En France, le méridien de Paris a tenu lieu de méridien origine jusqu'en 1884, date à laquelle la conférence de l'Union Astronomique Internationale (U.A.I.) à Washington choisit le méridien de Greenwich comme méridien origine. Pour que les délégués adoptent ce méridien, et non celui de Paris, le délégué britannique déclara qu'il était officiellement autorisé à annoncer que son gouvernement avait accepté d'adhérer à la convention métrique ...

3. En fait à cette même conférence de Washington, les délégués ont retenu de compter les longitudes vers l'est et vers l'ouest à partir d'un méridien central. Dans ce cours, on préfère compter la longitude terrestre positivement suivant une seule direction, comme le recommandent actuellement les commissions de l'U.A.I.



FIGURE 2.2 – Traînées des étoiles autour du pôle nord céleste. Photographie obtenue avec une pose d'environ 6 heures.

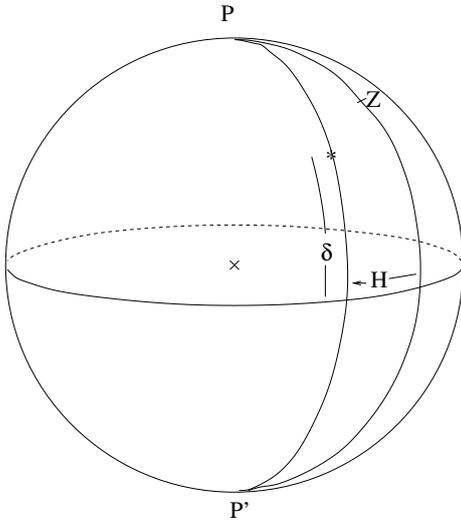
2.4 Mouvement diurne et coordonnées horaires

Le *mouvement diurne* s'interprète comme étant issu du mouvement de rotation de la Terre sur elle-même. Ce mouvement peut être considéré comme uniforme en une bonne première approximation. Ce mouvement s'observe par le mouvement apparent des *étoiles* (le Soleil, la Lune et les planètes ont un mouvement de nature différente et plus compliqué) : les étoiles décrivent des arcs de cercle, centrés sur un point particulier de la sphère céleste (fig. 2.2). Ce point est appelé *pôle céleste nord* et noté P .

Ainsi, toutes les étoiles de la sphère des fixes ont, sur la sphère locale, des mouvements apparents correspondant à des petits cercles dont le plan est perpendiculaire à l'axe des pôles. La période de ce mouvement diurne est la même pour toutes les étoiles (sauf le Soleil), et vaut approximativement 23h 56mn 4s dans les unités de temps habituelles.

On construit à partir de ce point un nouveau système de coordonnées : les *coordonnées horaires*. Le grand cercle origine est celui correspondant au pôle P . Il est appelé *équateur céleste*. Le méridien origine est celui passant par le zénith. Une étoile est repérée par :

- la longitude, appelée *angle horaire* H , mesurée dans le sens indirect entre 0 et 24h ;
- la latitude, appelée *déclinaison* δ , mesurée entre -90° et $+90^\circ$.



Le mouvement diurne des étoiles (sauf le Soleil) étant sur un petit cercle parallèle à l'équateur céleste, on voit que pour une étoile la déclinaison est une constante indépendante de l'instant et du lieu d'observation.

Pour ce qui est de l'angle horaire, il est variable mais il augmente linéairement avec le temps, il est indépendant de la latitude du lieu d'observation, et si pour une étoile on considère ses angles horaires H_A et H_B depuis deux lieux d'observation de longitude géographique respective L_A et L_B on a alors :

$$H_A - H_B = L_A - L_B.$$

2.5 Changement de coordonnées

2.5.1 Hauteur du pôle sur l'horizon

Avant de déterminer les formules de passage d'un système de coordonnées à l'autre on a besoin de déterminer la hauteur de pôle céleste nord sur l'horizon en fonction de la latitude du lieu. En effet c'est cette hauteur qui nous permet de positionner l'équateur céleste par rapport à l'horizon céleste.

Soit une coupe du globe terrestre suivant le méridien d'un lieu (voir figure). Ce plan contient la direction du Sud S sur l'horizon, du Zénith Z , et du pôle céleste Nord P . Ainsi, P , Z et S sont sur un même grand cercle.

L'horizon étant perpendiculaire à la direction du Zénith (direction qui passe par le centre de la Terre) et la direction du pôle céleste Nord perpendiculaire à l'équateur, on voit facilement que la hauteur du pôle céleste nord sur l'horizon est égale à la latitude du lieu. Ce résultat est indépendant de la latitude du lieu (hémisphère nord

soit :

$$\begin{array}{l} \sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H \\ \cos h \sin A = \cos \delta \sin H \\ \cos h \cos A = -\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos H \end{array} \quad (2.3)$$

De la même manière, on peut établir les formules inverses :

$$\begin{array}{l} \sin \delta = \sin h \sin \varphi - \cos h \cos \varphi \cos A \\ \cos \delta \sin H = \cos h \sin A \\ \cos \delta \cos H = \sin h \cos \varphi + \cos h \sin \varphi \cos A \end{array} \quad (2.4)$$

2.6 Coordonnées équatoriales et temps sidéral local

On a vu que la sphère des fixes est animée d'un mouvement de rotation uniforme par rapport à la sphère céleste locale. Si on définit un système de coordonnées sur la sphère des fixes, les étoiles auront des coordonnées constantes dans ce système. On définit le repère équatorial par :

- le pôle positif est le même que pour le repère horaire (ce point est fixe dans les deux repères). Le grand cercle origine est donc aussi l'équateur.
- le méridien origine est le méridien d'un point sur l'équateur : le *point vernal* ou *point γ* . Ce point est a priori arbitraire. On verra dans le chapitre suivant (chap. 3) comment il est défini. Pour l'instant, il suffit de dire qu'il est proche de la constellation du Poisson.

Le repère équatorial étant défini, les coordonnées équatoriales sont :

- l'*ascension droite* α qui correspond à la longitude. Elle est mesurée dans le sens direct ;
- la déclinaison δ c'est la même que pour les coordonnées horaires.

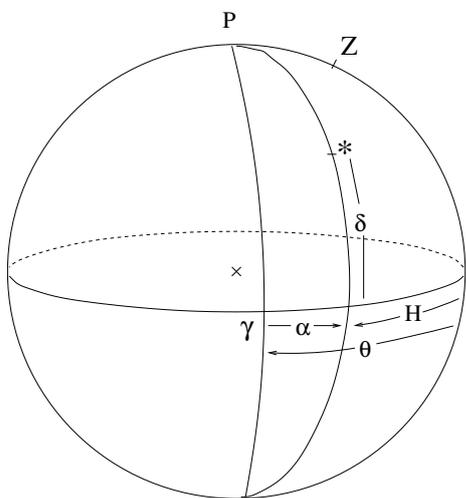
Le mouvement de la sphère des fixes par rapport à la sphère locale permet de définir une échelle de temps : le *temps sidéral local*. En effet, on a vu que l'angle horaire de n'importe quelle étoile (sauf le Soleil, comme on le verra plus tard) est un angle proportionnel au temps. Si au lieu d'une étoile on choisit le point γ , qui est un point de la sphère des fixes, alors l'angle horaire du point γ nous permet de définir un temps appelé *temps sidéral local*. On le note θ . Le jour sidéral, qu'on a déjà vu, est donc la durée qui s'écoule entre deux passages au Sud du point γ .

Remarquons qu'il s'agit ici d'un temps local, puisque l'angle horaire du point γ dépend de la latitude du lieu. Plus précisément, on peut relier les temps sidéraux de deux lieux différents. Soit deux lieux A et B sur la Terre, la différence entre leur heure sidérale locale est égale à la différence de leur longitude terrestre L . Si on compte positivement les longitudes à l'est, on a :

$$L_A - L_B = \theta_A - \theta_B \quad (2.5)$$

D'autre part on a le résultat important suivant : quelque soit l'étoile considérée et à chaque instant, on a :

$$H = \theta - \alpha. \quad (2.6)$$



Chapitre 3

Le mouvement du Soleil

Contrairement aux autres étoiles, le Soleil se déplace sur la sphère des fixes, c'est à dire α_{\odot} et δ_{\odot} ne sont pas constants.

Les variations de δ_{\odot} s'observent par la variation de la durée du jour, de la hauteur du Soleil à midi et l'azimut du Soleil à son coucher (ou lever), alors que les variations de α_{\odot} s'"observent" par le déplacement du Soleil dans les constellations du zodiac.

3.1 Coordonnées écliptiques

Puisque le mouvement du Soleil autour de la Terre est pratiquement une courbe plane, le mouvement du Soleil parmi ces constellations est un grand cercle. On le nomme *écliptique*. On observe que le Soleil parcourt tout l'écliptique en 366,2 jours sidéraux. Ce temps est appelé l'*année*.

Soit E le pôle de l'écliptique. On a :

$$\widehat{EP} = \omega = 23^{\circ}26',$$

P étant le pôle céleste nord. ω est appelé l'obliquité.

L'écliptique et l'équateur céleste se coupent en deux points de la sphère des fixes. Le *point* γ (vu au chapitre 2) est défini par l'intersection de l'écliptique avec l'équateur pour lequel le Soleil passe avec une déclinaison croissante, c'est l'*équinoxe de printemps*.

On peut ainsi définir un système de coordonnées liées à l'écliptique. On utilise le repère suivant :

- le pôle de l'écliptique E comme pôle positif, ainsi l'écliptique est le grand cercle origine, que l'on oriente dans le sens direct ;
- le méridien passant par le point γ comme méridien origine.

Les coordonnées écliptiques sont donc :

- l = longitude céleste, habituellement noté entre 0° et 360° ;
- b = latitude céleste, habituellement noté entre -90° et 90° .

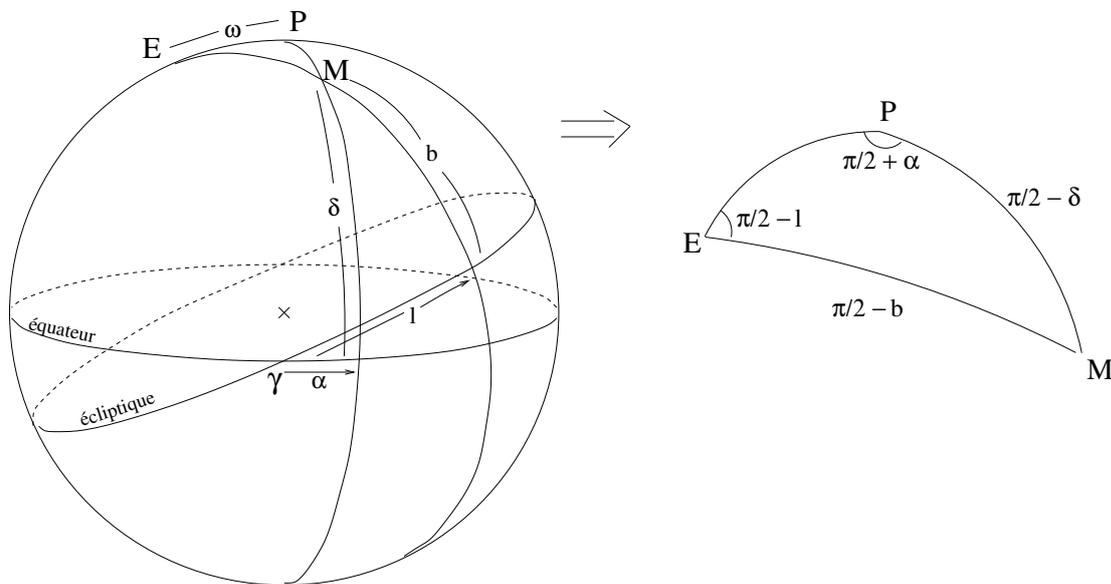
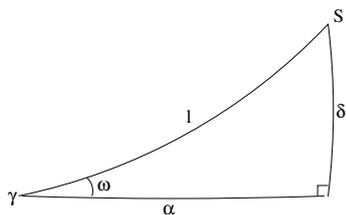


FIGURE 3.1 – Coordonnées équatoriales et écliptiques

Dans ce système, les étoiles ont des coordonnées constantes, le Soleil a une latitude égale à zéro et une longitude strictement croissante.

La figure (3.1) permettrait d'écrire, comme précédemment, les formules de changements de coordonnées. Il n'est pas utile ici de le faire. Ecrivons seulement ces formules dans le cas du Soleil, c'est à dire le cas où $b = 0$. On a :

$$\begin{aligned}\sin \delta &= \sin \omega \sin l \\ \tan \alpha &= \cos \omega \tan l\end{aligned}\quad (3.1)$$



On peut aussi établir la relation :

$$\sin \alpha = \cotan \omega \tan \delta,$$

entre la déclinaison et l'ascension droite du Soleil. Cette relation montre que les coordonnées du Soleil sont liées et que le Soleil décrit donc une courbe sur la sphère des fixes, correspondant à l'écliptique. Cette équation est aussi l'équation de l'écliptique.

3.2 Mouvement du Soleil

3.2.1 Approximation par mouvement uniforme en ascension droite

On suppose que le mouvement du Soleil est uniforme en ascension droite. Comme le seul temps correctement défini jusqu'ici est le temps sidéral, on a $\frac{d\alpha_{\odot}}{d\theta} = \text{constante}$, où θ est le temps sidéral local. Nous verrons plus tard les corrections à faire sur cette approximation. Cette approximation grossière a été utilisée en France jusqu'en 1816 pour l'établissement des échelles de temps.

En observant qu'une année correspond à 366,2 jours sidéraux, on a :

$$\frac{d\alpha_{\odot}}{dt} = \frac{1}{366,2} \text{ tour} \cdot \text{jsid}^{-1}.$$

On a vu (2.6) que $H_{\odot} = \theta - \alpha_{\odot}$, ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{dH_{\odot}}{d\theta} &= 1 - \frac{d\alpha_{\odot}}{d\theta} \\ &= 1 - \frac{1}{366,2} \\ &= \frac{365,2}{366,2} \text{ tour} \cdot \text{jsid}^{-1}. \end{aligned}$$

Le Soleil fait donc moins d'un tour par jour sidéral. Autrement dit, les passages du Soleil au méridien se font à intervalle de temps égaux légèrement supérieur à 1 jour sidéral.

On peut alors définir une nouvelle unité de temps, pour laquelle ces passages se font à intervalle d'un jour exactement. C'est le *jour solaire*. On dérive alors ici les sous unités heures, minutes, secondes correspondantes.

On note t le temps mesuré dans ces unités. On a :

$$\frac{dH_{\odot}}{dt} = 1 \text{ tour} \cdot \text{jsol}^{-1}.$$

On a :

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{365,2}{366,2} \text{jsol} \cdot \text{jsid}^{-1}$$

On obtient alors les relations suivantes :

$$\begin{aligned} 366,2 \text{ jours sidéraux} &= 365,2 \text{ jours solaires} = 1 \text{ an} \\ 1 \text{ jour solaire} &= 1 \text{ j } 0 \text{ h } 3 \text{ mn } 56,6 \text{ s de temps sidéral} \\ 1 \text{ jour sidéral} &= 23 \text{ h } 56 \text{ mn } 4,1 \text{ s de temps solaire} \end{aligned}$$

On définit aussi le *temps solaire civil local* (ou *temps solaire*) par :

$$t = H_{\odot} \pm 12 \text{ h} \tag{3.2}$$

Il est ainsi 12h quand le Soleil est au méridien. L'origine du temps solaire local est donc lorsque le Soleil passe à l'opposé du méridien origine.

Comme pour le temps sidéral, les temps solaires de deux lieux A et B de longitudes terrestres respectives L_A et L_B sont reliés par :

$$t_B - t_A = L_B - L_A \quad (3.3)$$

Les temps solaires ainsi définis se réfèrent à un Soleil hypothétique ayant un mouvement uniforme en ascension droite. On rajoute en général le qualificatif de *moyen* (temps solaire moyen, jour solaire moyen, etc...) pour le différencier du "temps" solaire vrai, que l'on va voir plus tard.

Pour simplifier l'utilisation de l'heure, une même heure solaire a été utilisée dans des régions étendues du globe. C'était l'heure civile de Paris pour la France en 1891. Ensuite, pour simplifier le changement d'heure d'une région à l'autre, il a été décidé de diviser la Terre en fuseau horaire de 1h d'angle (15°), et dans chaque fuseau horaire l'heure légale utilisée correspond à l'heure civile de Greenwich \pm un nombre entiers d'heures (à quelques exceptions près). La France a été placée dans le même fuseau que Greenwich en 1911, puis pour des raisons économique elle a adopté l'heure légale du 1er ou deuxième fuseau est (+1 ou 2 h) suivant la saison.

3.2.2 Mouvement réel du Soleil en longitude

La première loi de Kepler nous dit que l'orbite de la Terre autour du Soleil, n'est pas circulaire mais elliptique. D'autre part, la deuxième loi (loi des aires), nous dit que cette orbite n'est pas parcourue à vitesse uniforme. En revanche, à partir de ces lois on peut remarquer que l'orbite de la Terre possède un axe de symétrie passant par un point P , appelé *périhélie*, où la Terre est au plus proche du Soleil et un point A , appelé *aphélie*, où la Terre est la plus éloignée du Soleil. De plus l'orbite de la Terre est parcourue à une vitesse qui respecte cette symétrie. Le mouvement "apparent" du Soleil va donc respecter les mêmes propriétés.

La longitude écliptique du Soleil l_\odot est une fonction périodique de période T . Il en est de même de sa dérivée $\frac{dl_\odot}{d\theta}$, mais en plus on peut supposer que cette dérivée supporte de petites variations (ce qui n'est pas le cas de l_\odot). On remarque ici que le temps utilisé est le temps sidéral puisque c'est le seul correctement défini lorsqu'on considère le mouvement réel du Soleil.

Ainsi, le développement de Fourier de $\frac{dl_\odot}{d\theta}$ doit être rapidement convergent. Ce développement a la forme suivante :

$$\frac{dl_\odot}{d\theta} = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi \theta}{T} + b_1 \sin \frac{2\pi \theta}{T} + a_2 \cos 2\frac{2\pi \theta}{T} + b_2 \sin 2\frac{2\pi \theta}{T} \dots \quad (3.4)$$

Dans ce développement a_0 représente la vitesse moyenne. On a donc :

$$a_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

De plus si l'origine du temps est prise au moment du passage au périhélie, alors $\frac{dl_{\odot}}{d\theta}$ est une fonction paire du temps. Dans ce cas tous les termes en sinus de son développement de Fourier disparaissent.

Si on prend un origine du temps quelconque, on note θ_0 l'instant de passage au périhélie. On pose alors :

$$M_{\odot} = \frac{2\pi}{T}(\theta - \theta_0) = a_0(\theta - \theta_0).$$

M_{\odot} est une fonction affine du temps et est appelée *anomalie moyenne*.

Le développement 3.4 devient :

$$\frac{dl_{\odot}}{d\theta} = a_0 + a_1 \cos M_{\odot} + a_2 \cos 2M_{\odot} + \dots \quad (3.5)$$

Intégrons maintenant la relation précédente :

$$l_{\odot} = l_0 + a_0\theta + c_1 \sin M_{\odot} + c_2 \sin 2M_{\odot} + \dots \quad (3.6)$$

La partie affine de ce développement est appelée *longitude moyenne* du Soleil, noté l_m . On a :

$$l_m = l_0 + a_0\theta = l_0 + a_0\theta_0 + a_0(\theta - \theta_0) = \omega_{\odot} + M.$$

l_0 est la longitude moyenne du Soleil quand $\theta = 0$, alors que ω_{\odot} est la longitude du Soleil lorsqu'il est au périhélie. Autrement dit c'est la *longitude du périhélie*.

On remarque qu'à chaque passage au périhélie ou à l'aphélie, on a $M = k\pi$, ainsi tous les sinus dans le développement 3.6 disparaissent et on a $l_{\odot} = l_m$. En observant l'intervalle de temps séparant deux passages du Soleil au point γ , on a :

$$T = 366,2422 \text{ jsid.}$$

Donc

$$a_0 = \frac{1}{366,2422} \text{ tr} \cdot \text{jsid}^{-1} = 3538,643'' \cdot \text{jsid}^{-1}.$$

On choisi comme instant d'origine le 1er Janvier 2000 à 12h (en temps universel que l'on verra plus tard. l_0 est donc la longitude moyenne du Soleil à cet instant, qui correspond à la longitude du Soleil avec une petite correction venant des termes périodiques de l'Eq. 3.6. L'observation du Soleil à cet instant nous permet de déterminer $l_0 = 280^{\circ}00'$.

La longitude du périhélie ω_{\odot} se détermine en repérant le passage au périhélie du Soleil sur l'écliptique. On trouve $\omega_{\odot} = 282^{\circ}56'$, ce qui correspond approximativement au 3 janvier.

Le coefficient c_1 du développement 3.6 correspond à l'avance ou au retard maximal du Soleil sur un Soleil fictif de longitude l_m . Cette avance maximale, mesurée et corrigée des termes suivants, donne :

$$c_1 = 114'55'' = 0,033428 \text{ rad.}$$

Pour les termes suivants, on utilise plutôt la résolution analytique du problème de deux corps (voir A en annexe, ou l'option astronomie proposée au S6). On peut voir que dans ce cas les coefficients du développement 3.6 s'expriment en fonction de l'excentricité e de l'orbite de la Terre autour du Soleil. En particulier c_1 est de l'ordre de e , c_2 est de l'ordre de e^2 , etc.. Pour la Terre e est petit, comme on va le voir, donc le développement 3.6 est rapidement convergent. De plus, une fois déterminé e par l'observation, on peut calculer tous les coefficients avec une très bonne précision.

On a $c_1 = 2e$ (dans la mesure en radian). Ainsi $e = 0,016714$. $c_2 = 5/4e^2$. Donc $c_2 = 0,00034920$ rad = $1'12,03''$, $c_3 = 1,04''$, etc..

On remarque ici que Kepler ayant des observations précises à la minute d'angle près, il pouvait déterminer c_1 voire même c_2 . En revanche Kepler n'avait pas la théorie permettant de relier les coefficients à l'excentricité.

Finalement, en se limitant au premier terme on a :

$$l_{\odot} = \omega_{\odot} + M_{\odot} + c_1 \sin M = 282^{\circ}56' + M_{\odot} + 115' \sin M. \quad (3.7)$$

3.2.3 Application à la durée des saisons

L'équinoxe de printemps correspond à $l_{\odot} = 0^{\circ}$, il faut donc résoudre (numériquement) :

$$0^{\circ} = 282^{\circ}56' + M_{\odot} + 115' \sin M_{\odot}.$$

On trouve $M_{\odot} = 75^{\circ}13' = 0,2089$ tour, d'où $\theta - \theta_0 = 0,2089$ an = 76,3 jours solaires (moyens). On en déduit encore que $\theta = 4$ janvier +76,3 jours = 80,3 janvier = 49,3 février = 21,1 mars.

De même, en faisant $l = 90^{\circ}$ (solstice d'été), $l = 180^{\circ}$ (équinoxe d'automne) et $l = 270^{\circ}$ (solstice d'hiver), on trouve :

| | début de la saison | | durée (jours) |
|-----------|--------------------|-----------|---------------|
| printemps | 21,1 | mars | 92,7 |
| été | 21,8 | juin | 93,7 |
| automne | 23,5 | septembre | 89,8 |
| hiver | 22,3 | décembre | 89,0 |

3.2.4 Mouvement réel en ascension droite

Pour avoir maintenant l'ascension droite du Soleil, il faut utiliser la relation :

$$\tan \alpha_{\odot} = \cos \omega \tan l_{\odot}, \quad (3.8)$$

ω étant l'obliquité et vaut $23^{\circ}26'$. Puisque $\cos \omega = 0,918$, on peut dire que $\tan \alpha$ et $\tan l$ sont peu différents (à 8% près).

Ainsi, on peut dire que α_{\odot} et l_{\odot} sont proches. En utilisant le théorème des accroissements finis, entre l_{\odot} et α_{\odot} à la fonction tangente, on a :

$$\frac{\tan l_{\odot} - \tan \alpha_{\odot}}{l_{\odot} - \alpha_{\odot}} \approx \frac{1}{\cos^2 l_{\odot}}.$$

Puis en utilisant de le développement limité de $\cos \omega$ en zéro (ω est proche de zéro) :

$$\cos \omega \approx 1 - \frac{\omega^2}{2},$$

on trouve :

$$\alpha_{\odot} - l_{\odot} = \frac{-\omega^2/2}{2} \sin 2l_{\odot}.$$

Si l'obliquité n'apparaît pas petite, la quantité $-\frac{\omega^2}{4}$ l'est puisqu'elle vaut $-0,0418$, soit $-144'$ ¹. Un développement plus correct donnerait la valeur de $148'$. On écrit ainsi :

$$\alpha_{\odot} = l_{\odot} - 148' \sin 2l_{\odot} \quad (3.9)$$

3.3 Equation du temps

Les deux expressions (3.7) et (3.9) que l'on vient de voir sont en fait le début du développement en série de Fourier de :

$$\begin{aligned} l_{\odot} - \omega_{\odot} - M_{\odot} & \text{ en série de } M_{\odot} \\ \alpha_{\odot} - l_{\odot} & \text{ en série de } l_{\odot}. \end{aligned}$$

On pourrait donc poursuivre pour affiner les formules. On s'y prendrait toutefois autrement, en introduisant notamment les fonctions de Bessel. Les formules trouvées ici suffisent pour assurer une précision de $1' = 4$ s.

En se limitant aux premiers termes on a donc :

$$\alpha_{\odot} = \omega_{\odot} + M_{\odot} + 115' \sin M_{\odot} - 148' \sin 2l_{\odot}.$$

En posant :

$$\alpha_m = l_m = \omega_{\odot} + M_{\odot},$$

et

$$E = 115' \sin M_{\odot} - 148' \sin 2l_{\odot}$$

on a

$$\alpha_{\odot} = \alpha_m + E.$$

E est appelé *l'équation du temps* et correspond à la correction à faire sur le modèle d'un mouvement du Soleil uniforme en ascension droite pour avoir la vraie ascension droite du Soleil. L'évolution de E pour 2003 est représentée sur la figure (3.2)

De cette manière l'angle horaire du Soleil s'écrit

$$\begin{aligned} H_{\odot} &= (\theta - \alpha_{\odot}), \\ &= (\theta - \alpha_m) - E, \end{aligned}$$

soit encore

$$H_{\odot} = H_m - E.$$

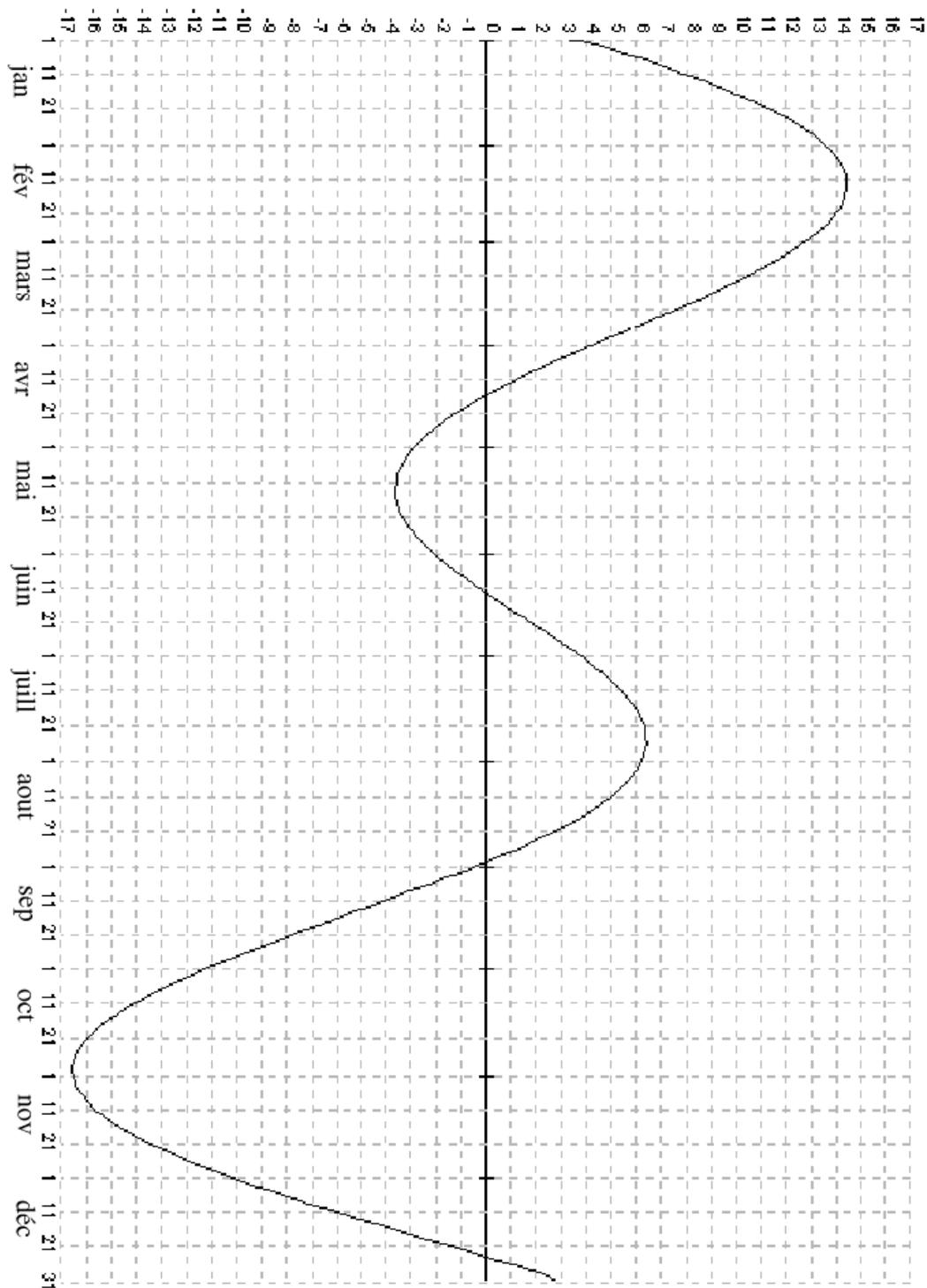


FIGURE 3.2 – Equation du temps (en minutes) pour 2003 (réalisé avec le logiciel “Shadow 1.5.4”)



FIGURE 3.3 – Courbe en 8 montrant l’effet de l’équation du temps dans le ciel de Crimée (V. Rumyantsev/observatoire de Naucsny). On a superposé des images du Soleil prises de 10 jours en 10 jours le matin à la même heure

Les notions introduites dans la section (3.2) restent vraies si on ajoute le qualificatif *moyen*. Ainsi, le *temps solaire moyen local* est :

$$t = H_m \pm 12h \quad (3.10)$$

Le *jour solaire moyen* est tel que $\frac{dH_m}{dt} = 1$ tour par jour solaire moyen.

Les autres sont qualifiées de vraies : Le *temps solaire vrai local* est $H \pm 12h$. Le terme de “temps” est ici impropre car il ne peut s’identifier au temps newtonien (celui que l’on utilise dans les équations de la mécanique) et correspond à un angle dont l’évolution n’est pas strictement proportionnel au temps comme on vient de le voir. C’est pourtant ce “temps” qui est donné par les cadrans solaires.

Le temps newtonien est accessible par le temps solaire moyen.

Enfin, le temps solaire moyen local de Greenwich est appelé *Temps Universel* (TU ou UT pour Universal Time).

En superposant des images du Soleil prises de 10 jours en 10 jours à la même heure, on devine une courbe en 8. Si cette photo est faite vers midi l’axe du 8

1. Il peut paraître surprenant de voir que l’effet de l’obliquité est du même ordre de grandeur que l’effet de l’excentricité.

est vertical sinon celui-ci est incliné comme sur la photo de la figure (3.3). L'axe de symétrie du 8 correspond aux variations en déclinaisons et l'axe perpendiculaire (donc suivant l'équateur céleste) représente les écarts dus à l'équation du temps.

Cette courbe en 8, appelée aussi *analemme*, est quelques fois dessinée sur les cadrans solaires. Cela permet d'effectuer, directement à la lecture, la correction due à l'équation du temps.

Quand E est maximum ou minimum, l'heure donnée par un cadran solaire est erronée (l'erreur atteint plus de 16 minutes le 31 octobre) mais la marche du cadran est juste puisque $\frac{dE}{dt} = 0$ pour ces dates. Inversement aux points d'inflexion $\frac{dE}{dt}$ est extremum. Par exemple le 22 décembre, $\frac{dE}{dt} = 3,2 \cdot 10^{-4}$ et donc le jour solaire vrai à cette date est 24h 0mn 28s. Quand $E = 0$, en revanche, l'heure donnée par le cadran solaire correspond bien à l'heure donnée par le temps solaire moyen.

3.4 Calendrier et mesure du temps

3.4.1 Précession des équinoxes

Jusqu'à maintenant, on a supposé que le point γ était fixe. Or, l'action conjuguée de la Lune et du Soleil sur le bourrelet équatorial de la Terre fait que l'axe de rotation de la Terre tourne autour du pôle de l'écliptique à la manière d'une toupie dont l'axe de rotation tourne autour de la verticale (figure 3.4).

L'axe de rotation de la Terre parcourt le cercle de précession en 26 000 ans . Ainsi le point γ ou point vernal dont la longitude est 0 par définition se déplace parmi les étoiles. Ce mouvement est appelé *précession des équinoxes* (précession car il se déplace en sens inverse du Soleil). Le point γ tourne donc sur l'écliptique à raison de 1 tour en 26 000 ans (25 778 ans plus exactement).

Le temps que met la longitude du Soleil pour augmenter de 360° , c'est à dire le temps qui sépare deux passages successifs du Soleil au point γ est l'*année tropique*. Cette années est égale à 365,242 198 79 jours solaires moyens.

Mais, du fait de la précession, le point γ s'est déplacé sur l'écliptique dans le sens inverse du mouvement du Soleil. Ainsi, pendant une année tropique le Soleil n'a pas parcouru tout l'écliptique, il lui reste à parcourir l'arc d'écliptique parcouru par le point γ pendant cette année. Cet arc vaut $\frac{1}{25778}$ tour = 50,"275. Le temps mis pour faire un tour complet sur l'écliptique est donc plus long, c'est l'*année sidérale*.

La différence entre l'année sidérale est l'année tropique est d'environ 20 mn.

3.4.2 Calendrier grégorien

Ce calendrier est universellement reconnu.² Il est basé sur l'année tropique afin que l'année civile soit calée sur le rythme des saisons.

2. Les autres calendriers sont éventuellement utilisés en parallèle pour organiser diverses traditions culturelles ou religieuses.

En 46 avant JC, Jules César fixait l'équinoxe de printemps au 25 mars et imposait le système des années bissextiles : 3 années communes de 365 jours sont suivies d'une année bissextile de 366 jours (celle dont le millésime est divisible par 4). Ainsi la durée moyenne de l'année dite julienne vaut 365.25 jours. L'écart avec l'année tropique est donc de 0,0078 jour/an.

En 1582 le calendrier julien ayant pris de l'avance sur les saisons, le printemps tombait le 11 mars. C'est pourquoi le Pape Grégoire XIII décréta que le jeudi 4 octobre 1582 serait suivi du vendredi 15 octobre. Il ne supprima donc que 10 jours afin que le printemps soit le 21 mars (pour respecter les choix du Concile de Nicée relatif à Pâques qui ne doit pas être fêté à la nouvelle lune). Mais surtout, il décréta une diminution de l'année civile de 0,0075 jour : les années séculaires rondes ne sont bissextiles que si le nombre des centaines est divisible par 4. Ainsi, les années 1700, 1800, 1900 sont communes alors que l'année 2000 est bissextile. La durée moyenne de l'année civile est maintenant de $365 + 1/4 - 3/400 = 365,2425$ jours, la différence avec l'année tropique n'est plus que de 0,0003 jour. Cette différence ne sera visible que dans environ 3000 ans (décalage de 1 jour).

Le calendrier grégorien a été adopté immédiatement en Italie, Espagne et Portugal. En France, c'est le roi Henri III qui décréta la suppression de 10 jours la même année, le dimanche 9 décembre 1582 étant suivi du lundi 20 décembre. Les anglais passèrent du calendrier julien au calendrier grégorien en 1752 (le lendemain du mercredi 2 septembre 1752 étant le jeudi 14 septembre³). Les autres pays n'ont adopté le calendrier grégorien que plus tard : le Japon en 1873, la Bulgarie et l'Albanie en 1912, la Russie en 1918⁴, la Chine en 1912, la Roumanie et la Yougoslavie en 1919, la Grèce en 1923, la Turquie en 1926.

3.4.3 Les différents temps

On a déjà vu le *temps sidéral* qui correspond à l'angle horaire du point γ . Du fait de la précession, la période du mouvement diurne du point γ est légèrement différente de celle des étoiles. On peut ainsi définir un jour stellaire, qui est 8,4 ms plus long que le jours sidéral. Mais c'est une unité très peu utilisée en astronomie (même si beaucoup plus stable que le jour sidéral).

A partir de l'observation du Soleil et en utilisant l'équation du temps on peut calculer le *temps solaire moyen* (parfois appelé *temps civil*), qui correspond à l'angle horaire du Soleil corrigé de l'équation du temps, ± 12 h.

Le temps solaire moyen de Greenwich est appelé *temps universel* (TU ou UT). Le *temps légal* correspond au temps universel corrigé d'un décalage horaire dépendant du pays et éventuellement de la période de l'année.

L'angle horaire du Soleil ± 12 h correspond lui au *temps solaire vrai*. Ce dernier

3. Cela provoqua quelques émeutes car la population pensait que le gouvernement essayait de leur voler onze jours de salaire.

4. Ce qui explique que les commémorations de la révolution d'octobre 1917 sur la place rouge se faisaient, du temps de l'Union Soviétique, en novembre.

n'est pas à proprement parler un temps, mais un angle qui, comme on l'a vu, n'est pas strictement proportionnel à un temps.

Mis à part le temps universel ces temps sont locaux.

Mais la précession des équinoxe subit des variations. En effet, l'année tropique diminue de $0,54 \text{ s}\cdot\text{siècle}^{-1}$. Le jour sidéral subit donc une diminution relative de l'ordre de $2 \cdot 10^{-9} \text{ siècle}^{-1}$. Ainsi même le temps sidéral ne peut être considéré comme étant exactement proportionnel à un temps.

Il s'agit d'une quantité bien connue et qu'on peut aussi modéliser, ainsi on peut aussi décider de choisir le temps sidérale à partir d'une date donnée (on choisira le point γ correspondant à cette date).

De même les irrégularités de la rotation de la Terre sur elle-même font que l'année tropique subie une diminution relative de l'ordre de $2 \cdot 10^{-8} \text{ siècle}^{-1}$ (similaire à la variation modélisable). Ainsi le temps universel non plus ne peut être considéré comme une échelle de temps. En 1960 on lui a donc substitué le *temps des éphémérides* (TE) qui correspond au temps universel défini à partir d'une année tropique donnée. Le jour julien correspond alors à 365,25 j de cette année tropique de référence. La différence entre TU et TE est petite mais elle pourra atteindre plus de 7h dans 3000 ans. Actuellement le TU continue d'être déterminé par les observation alors que la définition du TE peut aussi être modifié en changeant l'année tropique de référence afin de réduire les écarts entre TU et TE.

Le problème de TE est que sa définition n'en fait pas un temps très précis (moins que TU). Ainsi depuis 1972, le temps de référence est donné par des horloges atomiques qui fonctionnent en continue depuis 1958 (avant cette date TE ou TU font référence). C'est le *Temps Atomique International* (TAI).

Cependant UT reste important puisqu'il donne une information sur la position du Soleil, en particulier il est utile pour les marins. Il est donc toujours diffusé mais afin qu'il ne diffère pas trop du TAI on lui préfère le *temps universel coordonnée* (TUC, ou UTC) qui diffère du TAI d'un nombre entier de seconde (connu) et du TU d'une quantité inférieure à 1 s. Lorsque ce dernier écart devient trop grand on ajoute ou retranche une seconde à l'UTC (saut de seconde effectué le 31 décembre ou le 30 juin).

Chapitre 4

La Terre

Au chapitre 2, nous avons défini divers systèmes coordonnées sur la sphère céleste. Les coordonnées horaires et équatoriales utilisent la constatation du mouvement diurne, c'est-à-dire du mouvement de rotation uniforme de la sphère des fixes autour du pôle céleste nord (Fig :.2.2). Il n'était nullement nécessaire, à ce stade du cours, d'interpréter ce mouvement comme étant issu du mouvement de rotation de la Terre sur elle-même. Nous l'avons cependant fait en Sect. 2.4 (latitude terrestre) et en Sect. 2.6 (longitude terrestre), afin de pouvoir faire des exercices d'application issus de la vie courante. Le but de ce chapitre est de définir précisément les coordonnées terrestres et, bien sûr, de voir les liens avec l'astronomie.

4.1 Représentation astronomique de la Terre

Définition : La figure *sphérique* formée par les zéniths de tous les lieux de la Terre est appelée *Globe Terrestre*.

En effet, la verticale ascendante d'un lieu situé à la surface de la Terre est représentable par un point de la sphère céleste que nous avons appelé zénith. Or il n'existe pas, à la surface de la Terre, deux lieux qui aient des verticales parallèles et de même sens (injectivité)¹. Il existe toujours un lieu dont la verticale ait une direction et un sens donné (surjectivité). Il y a donc bijection entre les points de la surface de la Terre et les points sur la sphère céleste. Ainsi, un système de coordonnées permettant de repérer le zénith d'un lieu sur la sphère céleste permettra en même temps de repérer ce lieu sur la Terre.

On a rappelé que le mouvement diurne est le mouvement relatif de la sphère des fixes par rapport à la sphère locale. Donc, le zénith d'un lieu subit, relativement à la sphère des fixes, un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des pôles (PP'), dans le sens direct, à la vitesse de un tour par jour sidéral. Par ailleurs, on observe

1. Cette affirmation est évidente si la Terre est supposée sphérique et de répartition de masse uniforme. Ça l'est encore, si on considère la Terre comme une ellipsoïde. Pour les cas plus fins, cette affirmation est moins évidente mais elle est quand même facile à concevoir tant que les lieux considérés ne sont pas trop proches.

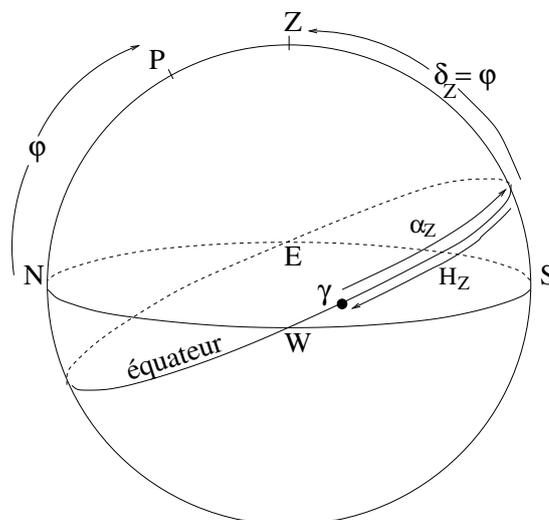


FIGURE 4.1 – Coordonnées du zénith sur la sphère des fixes.

que les zéniths de tous les lieux de la Terre sont animés de ce même mouvement. On en déduit que le Globe Terrestre constitue une figure indéformable. On peut donc y reporter des points représentatifs (villes, monuments, sommets de montagne, ...) ou des lignes remarquables (fleuves, frontières, ...). Une telle représentation n'est pas semblable à la Terre (car la Terre n'est pas sphérique). C'est une représentation de la Terre au sens géométrique du terme. Comme la Terre est quand même approximativement une sphère, sa représentation par le Globe Terrestre lui est approximativement semblable. Dans les applications courantes de la Géographie, on admet cette approximation. C'est d'ailleurs ce que nous avons fait dans l'interprétation du mouvement diurne au Chapitre 2.

4.2 Coordonnées astronomiques d'un lieu.

Coordonnées sur la sphère des fixes

Le point Z en tant que point sur la sphère céleste peut être repéré par l'un des systèmes de coordonnées déjà connus : par exemple les coordonnées équatoriales α_Z et δ_Z . Ces deux coordonnées sont définies sur la sphère des fixes. Or le point Z n'est pas fixe sur cette sphère, donc, au moins l'une des deux coordonnées est variable dans le temps.

La déclinaison de Z s'identifie avec la latitude du lieu que nous avons déjà introduite. Elle est invariable avec le temps. Par contre ce n'est pas le cas de son ascension droite α_Z . Cet angle correspond à l'angle entre le méridien passant par γ et le méridien passant par Z compté positivement dans le sens direct. Il est donc le même que l'angle entre le méridien passant par Z et celui passant par γ compté

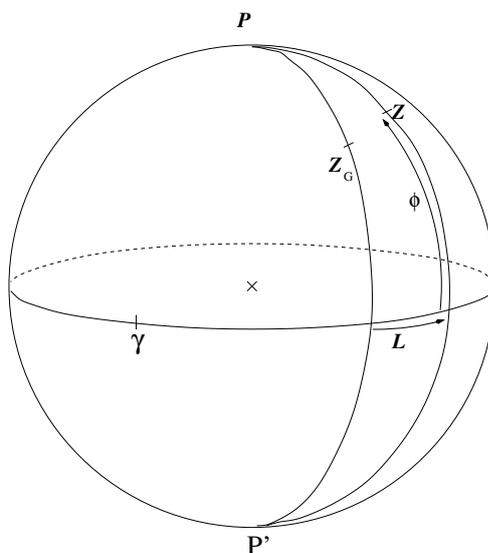


FIGURE 4.2 – Coordonnées astronomiques d'un lieu.

positivement dans le sens indirect. On reconnaît ainsi l'angle horaire du point γ qui est égal au temps sidéral du lieu Z :

$$\alpha_Z = H_Z(\gamma) = \theta \quad (4.1)$$

Coordonnées invariables

Pour obtenir pour les points Z (ou de façon équivalente des points de la surface terrestre) des coordonnées invariables, nous devons rapporter ces points à un repère lié au Globe Terrestre (donc tournant dans le sens direct par rapport à la sphère des fixes). Le système de coordonnées astronomiques du point Z est ainsi défini :

- Le pôle positif est le pôle nord céleste P .
- Le méridien origine est celui passant par le zénith Z_0 d'un point particulier sur la Terre (Observatoire de Greenwich)² ;
- Le sens choisi est le sens direct ;
- Le grand cercle origine est l'équateur céleste.

Ainsi :

- La première coordonnée, L , est appelée *longitude astronomique* correspond à l'angle entre le méridien de Greenwich et le méridien du lieu. Il est compté de -180° à $+180^\circ$ ou de $-12h$ à $+12h$. On dit que la longitude est Est lorsqu'elle est positive (Ouest lorsqu'elle est négative).
- La deuxième coordonnée, φ , est appelée *latitude astronomique*.

2. Exemple : le méridien de Paris qui est matérialisé régulièrement par des disques en bronze dans la ville (Observatoire, Eglise St Sulpice, ...)

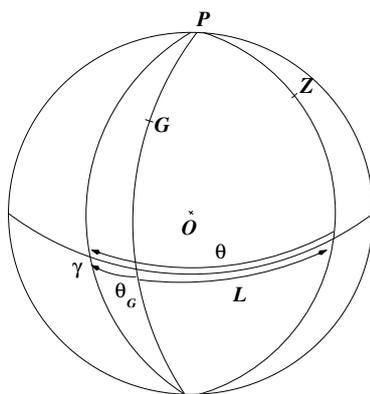


FIGURE 4.3 – Relation entre les temps sidéraux et la longitude du lieu.

- Les lignes d'égalité de coordonnées sont appelées respectivement les méridiens et les parallèles.

4.3 Relation entre longitude et temps sidéral local

On considère, à un instant donné, le zénith Z d'un lieu quelconque de longitude astronomique L .

L'angle entre le méridien de Greenwich et le méridien du point γ mesuré dans le sens indirect correspond au temps sidéral de Greenwich noté θ_0 . L'angle entre le méridien du point γ et le méridien passant par Z , compté dans le sens indirect, correspond à l'opposé du temps sidéral du lieu noté θ . Enfin l'angle entre le méridien de Greenwich et le méridien passant par Z , mesuré dans le sens indirect correspond à l'opposé de la latitude du lieu L . Voir la Fig. 4.3.

Ainsi, par la relation de Chasles, et en utilisant le sens direct on $\theta_0 - \theta = -L$. C'est à dire :

$$L = \theta - \theta_0.$$

Cette relation montre que les temps sidéraux de deux lieux diffèrent d'une quantité constante égale à la différence des longitudes.

L'horloge du lieu Z retarde sur celle de Greenwich si sa longitude est ouest ($L < 0$). Elle avance sur celle de Greenwich dans la cas contraire.

4.4 Détermination des coordonnées d'un lieu

Latitude

Pour avoir la latitude, il suffit de mesurer la hauteur du pôle céleste nord. La méthode la plus classique utilise l'instrument méridien. Le principe est de mesurer

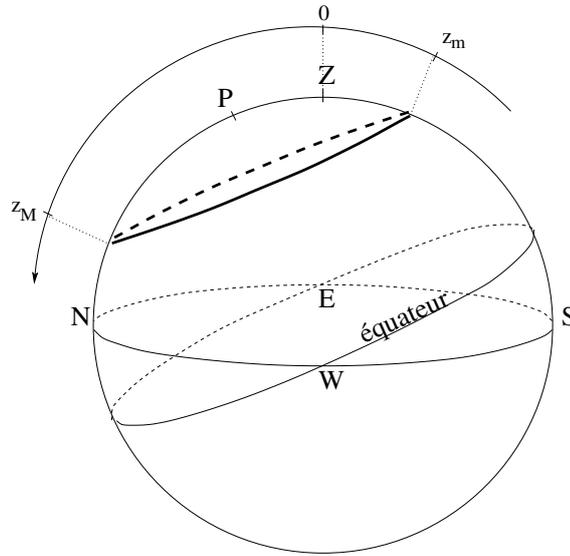


FIGURE 4.4 – Calcul de la latitude d'un lieu.

les distances zénithales z_m et z_M d'une même étoile lors de ces culminations et d'en prendre la moyenne :

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{z_m + z_M}{2} \quad (4.2)$$

Pour pouvoir utiliser cette formule même dans le cas où la culmination supérieure se situe au delà du zénith, il suffit que les distances zénithales soient des distances algébriques.

Longitude

Pour la longitude, il suffit de faire la différence des indications données, à un même instant, par deux horloges réglées selon les temps sidéraux des lieux Z_0 et Z . Le réglage d'une horloge en temps sidéral local se fait aussi au moyen de l'instrument méridien.

On peut considérer que le temps sidéral local de Greenwich θ_0 est diffusé en permanence. En réalité, il s'agit du temps universel qui est diffusé, mais on sait comment se déduisent ces deux temps l'un de l'autre. On observe une étoile connue d'ascension droite α . Son observation nous donne son angle horaire H , ainsi on en déduit le temps sidéral local θ . La longitude astronomique du lieu est simplement $L = \theta - \theta_0$.

Avant l'utilisation des moyens de transmission moderne, les déterminations des longitudes faisaient intervenir des moyens délicats et imprécis de comparaisons à distance de deux horloges : signaux optique, transport de chronomètres. Depuis l'invention des horloges atomiques facilement transportables, la méthode de transport d'horloge reprend toute sa valeur.

Pour s'affranchir du transport d'horloge, il ne reste que des moyens astronomiques pour déterminer l'heure. Ce sont alors les positions d'astres de mouvement plus ou moins rapides qu'il faut utiliser (Soleil, Lune, planètes, satellites de Jupiter, ...). Les tables qui donnent ces positions sont appelées *éphémérides*, elles sont publiées en France par l'Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Ephémérides (IMCCE). Historiquement, cette publication se fait sous la responsabilité du "Bureau des Longitudes", et la publication correspondante s'intitule "Connaissance des Temps". A l'époque de la création du Bureau des Longitudes, connaître les longitudes partout sur la Terre permettait de contrôler les océans. Le 7 messidor an III (25 juin 1795), une loi de la Convention Nationale fixe le rôle du Bureau des Longitudes : publier "un annuaire propre à régler ceux de la République". On pourra consulter <http://www.imcce.fr>

4.5 Le point en mer : droites de hauteur

Loin des continents et des repères visuels ou radio qu'ils procurent, on déterminait autrefois le *point* où l'on se trouvait par des moyens simples et moins précis. On ne faisait intervenir que des mesures de hauteur d'astres au moyen du sextant. Cette technique est toujours utilisée dans les cas où les moyens modernes de navigation sont indisponibles ou inefficaces. A l'heure du GPS, les méthodes de l'astronomie nautique ne sont pas révolues. Evidemment, en termes de précision et de commodité les progrès apportés par ce type de système sont considérables. Cependant, ces systèmes hautement sophistiqués ont pour contrepartie une grande dépendance envers les prestataires de service³ (en temps de crise ou de conflit, par exemple) ou envers des causes plus banales comme les pannes (système, pile défectueuse, ...). D'ailleurs le sextant et les tables astronomiques adaptées (comme les "Ephémérides Nautiques" publiées par l'IMCCE) sont obligatoires pour les navires en haute mer.

Le sextant

Le sextant est un instrument qui mesure l'angle entre l'horizon et un astre. Le principe est de voir en superposition, deux images provenant de deux directions différentes et de mesurer ainsi l'angle entre ces deux directions. Si l'instrument est tenu verticalement, cet angle est la hauteur de l'astre.

La *lunette* est alignée avec le *petit miroir* qui est solidaire de l'instrument. Ce miroir est à moitié transparent. Ainsi, l'observateur peut voir l'horizon à travers. Ce petit miroir réfléchit aussi l'image provenant du *grand miroir*. Ce grand miroir est

3. Le système européen GALIEO sera lui aussi un système de positionnement par satellite. Il devrait en partie remédier à ce problème de dépendance à un unique prestataire de service. En ce sens le lancement du système GALILEO par l'Europe est une décision autant politique que scientifique, tout comme l'a été la création du Bureau des Longitudes. Il s'agit, dans les deux cas, de contrôler l'espace (terrestre, maritime ou aérien).

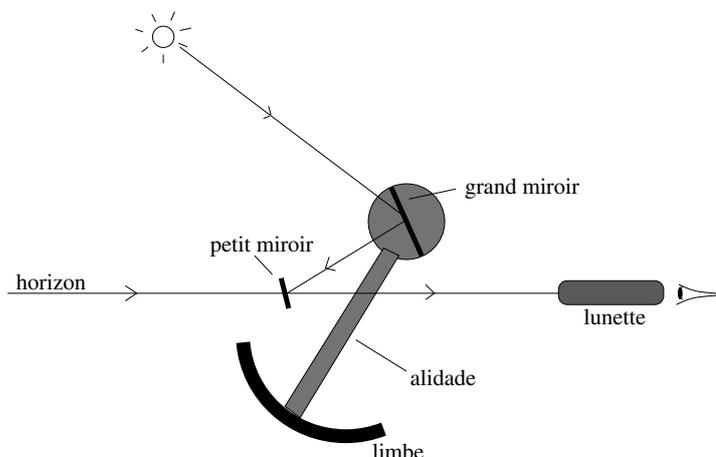


FIGURE 4.5 – Le sextant.

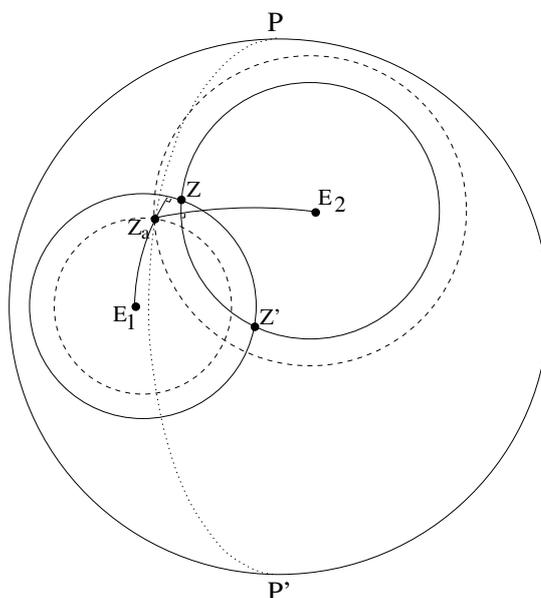
mobile et s'oriente grâce à l'*alidade*. L'observateur vise ainsi l'astre et le positionne sur l'horizon. La position de l'*alidade* sur le *limbe* permet de lire l'angle recherché.

Le point

Mesurons la distance zénithale z_1 d'une étoile E_1 , à un instant donné. Sur la sphère des fixes, on porte l'étoile E_1 par ses coordonnées équatoriales α_1 et δ_1 . On trace ensuite (sur cette sphère) le cercle de centre E_1 et de rayon z_1 . Ce petit cercle est appelé *cercle de hauteur*. C'est le lieu géométrique des positions possibles du zénith Z du lieu considéré.

Mesurons, au même instant, la distance zénithale z_2 d'une deuxième étoile E_2 . On construit de la même manière un second cercle de hauteur. Ces deux cercles se coupent au point Z représentatif du lieu, ainsi qu'en un autre point Z' , symétrique de Z par rapport à $\widehat{E_1 E_2}$. La mesure des deux distances zénithales permet donc, de déterminer (graphiquement ou par le calcul) deux points Z et Z' parmi lesquels se trouve le zénith recherché (voir Fig.4.6). On pourra choisir entre ces deux points, généralement fort éloignés, si l'on connaît de façon approximative la région de la Terre où l'on se trouve.

Remarque : la méthode ne dispense pas de connaître le temps sidéral de Greenwich θ_0 . En effet, par la méthode précédente, on connaît la position du zénith sur la sphère des fixes mais dans le système de coordonnées équatoriales. Or, l'origine des longitudes sur une carte n'est évidemment pas celle des coordonnées équatoriales (car il y a le mouvement diurne entre les deux). La connaissance de θ_0 permet justement de déterminer l'origine des longitudes.

FIGURE 4.6 – Tracé des cercles de hauteur des étoiles E_1 et E_2 .

Droites de hauteurs

La détermination par le calcul de l'intersection de deux cercles ne pose pas de réel problème. Mais en mer on se contente habituellement de construire le point Z sur une carte. Cette carte représentant une petite partie du globe terrestre, le point s'obtient par l'intersection de deux petites portions des cercles de hauteur assimilables à des droites dites *droites de hauteur*. Ces droites étant les tangentes en un point donné des cercles de hauteur, il est nécessaire de positionner au préalable ce point, c'est-à-dire de connaître approximativement le point d'intersection recherché.

Dans les explications qui suivent, la Figure (4.6) ne constitue pas le tracé du point en mer proprement dit. Cette figure n'est donnée qu'à titre explicatif pour mieux comprendre la Figure (4.7) qui correspond elle, au tracé des droites de hauteur que les marins font sur leur carte.

Soit Z_a une position approchée du lieu, en fixant par exemple sa longitude et sa latitude à des valeurs rondes

$$L_a \quad \text{et} \quad \varphi_a$$

On connaît l'instant θ_0 de l'observation en temps sidéral de Greenwich. Le temps sidéral local du lieu Z_a est donc

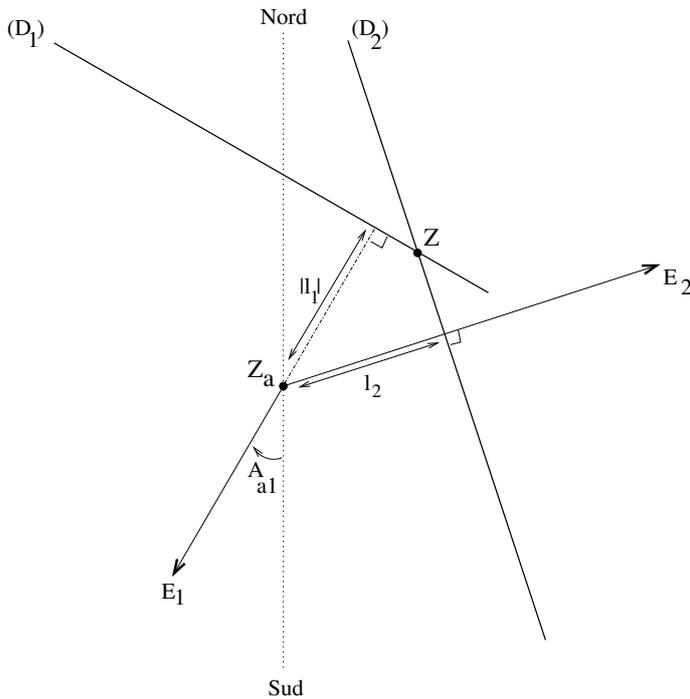
$$\theta_a = \theta_0 + L_a$$

Par l'ascension droite α_1 de l'étoile E_1 , on calcule son angle horaire :

$$H_{a1} = \theta_a - \alpha_1 = \theta_0 + L_a - \alpha_1$$

On a ainsi les coordonnées horaires de E_1 ,

$$(H_{a1}, \delta_1)$$

FIGURE 4.7 – Tracé des droites de hauteurs des étoiles E_1 et E_2 .

, dans le système du lieu Z_a . On en déduit, par les formules de formules de changements de coordonnées (2.3) et avec φ_a , les coordonnées horizontales

$$(A_{a1}, h_{a1}) \quad \text{ou} \quad (A_{a1}, z_{a1})$$

Ce sont les coordonnées horizontales de E_1 pour le lieu Z_a .

Avec cette valeur de z_{a1} , on peut tracer le cercle de hauteur correspondant ; ce qui est fait en pointillé sur la Figure (4.6). En fait l'observateur, au lieu Z où il se trouve, a mesuré la distance zénithale z_1 . Cette mesure correspond au cercle en trait plein de la Figure (4.6).

On note l_1 la longueur algébrique suivante, appelée **intercept** :

$$l_1 = z_{a1} - z_1 \tag{4.3}$$

Pour les deux étoiles prises en exemple dans les Figures (4.6) et (4.7), l_1 est négatif et l_2 est positif. Leur valeur numérique est petite puisque Z est proche de Z_a . Dans la pratique du point en mer, l'intercept ne dépasse pas quelques dizaines de minutes de degré.

Sur la sphère céleste, l'angle $(P'Z_aE_1)$ correspond à l'azimut A_{a1} de l'étoile E_1 . C'est que rappelle la figure (4.8). Attention, ne pas oublier que l'azimut est compté dans le sens rétrograde.

La construction sur une carte marine se fait alors de la manière décrite ci-après. Cette carte est à considérer comme le plan tangent de la sphère de la Figure (4.6) au voisinage de Z_a . La construction est faite sur la Figure (4.7).

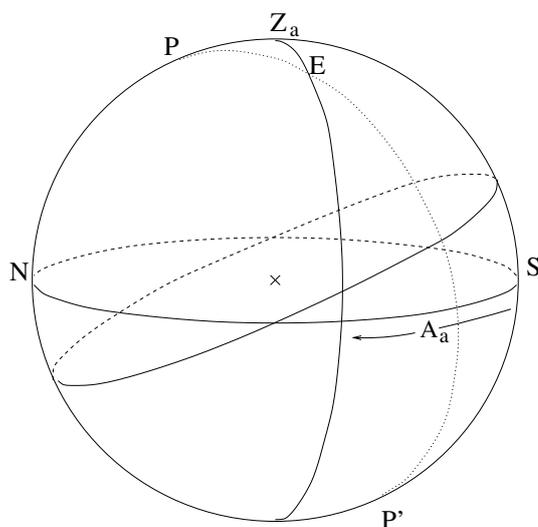


FIGURE 4.8 – Azimut.

- On se munit une carte de la région concernée, où figure au moins l'échelle de la carte (la longueur qu'occupe un arc de $1'$ de la sphère céleste), son orientation (la direction Nord-Sud) et les lignes coordonnées du globe terrestre (ou tout autre repère terrestre).
- On positionne Z_a
- On trace la demi-droite $[Z_a E_1)$ grâce à l'azimut $A_{a1} = \widehat{P'Z_a E_1}$. Le point P' n'est pas sur cette carte (tout comme E_1) mais sa direction par rapport à Z_a est celle du Sud.
- La droite $(Z_a E_1)$ est perpendiculaire à la (cercle)droite de hauteur cherchée. La première droite de hauteur D_1 est positionnée à la distance l_1 de Z_a .
- La deuxième droite de hauteur D_2 est positionnée de la même façon grâce à A_{a2} et l_2 (par une observation de l'étoile E_2 faite au même instant θ_0).
- Le point Z cherché est l'intersection de D_1 et de D_2 . Si le canevas des coordonnées L et φ figure sur la carte, une simple lecture sur les échelles de la carte donne les valeurs de L et de φ cherchées.

Pour positionner la droite de hauteur avec la valeur de l du bon côté de Z_a , il faut se rappeler la définition de l'intercept (4.3). Elle indique que la droite est du côté de l'étoile E . Ainsi, pour la Figure (4.7), D_1 est du côté opposé à E_1 ($l_1 < 0$) et D_2 est du côté de E_2 ($l_2 > 0$).

A titre de vérification, les navigateurs construisent habituellement une troisième droite de hauteur. Elle doit concourir avec les deux premières aux erreurs de mesures sur z_1 et z_2 . La précision obtenue est de 0,5 à $1'$ en navigation maritime et de plusieurs minutes de degré en navigation aérienne.

4.6 Un illustration littéraire

Les romans d’aventure avec des voyages au long cours abondent d’exemples d’utilisation et de mesure des coordonnées terrestres. Nous avons choisi ici, un exemple tiré du roman de Jules Verne “Vingt mille lieues sous les mers”^{4, 5}

Le capitaine Némó, muni de son sextant, prit la hauteur du Soleil, qui devait lui donner sa latitude. Il attendit pendant quelques minutes que l’astre vint affleurer le bord de l’horizon. Tandis qu’il observait, pas un de ses muscles ne tressaillait, et l’instrument n’eût pas été plus immobile dans une main de marbre.

“Midi, dit-il. Monsieur le professeur, quand vous voudrez?...”

Je jetais un dernier regard sur cette mer un peu jaunâtre des atterrages japonais, et je redescendis au salon.

Là, le capitaine fit son point et calcula chronométriquement sa longitude, qu’il contrôla par de précédentes observations d’angles horaires. Puis il me dit :

“Monsieur Aronax, nous sommes par cent trente-sept degrés et quinze minutes de longitude à l’ouest ...

- De quel méridien ? demandai-je vivement, espérant que la réponse du capitaine m’indiquerait peut-être sa nationalité.

- Monsieur, me répondit-il, j’ai divers chronomètres réglés sur les méridiens de Paris, de Greenwich et de Washington. Mais, en votre honneur je me servirai de celui de Paris.”

Cette réponse ne m’apprenait rien. Je m’inclinai, et le commandant reprit :

“Trente-sept degrés et quinze minutes de longitude à l’ouest du méridien de Paris, et par trente degrés et sept minutes de latitude nord, c’est-à-dire à trois cents milles⁶ environ des côtes du Japon. C’est aujourd’hui 8 novembre, à midi, que commence notre voyage d’exploration sous les eaux.

- Dieu nous garde ! répondis-je

4. Dans ces romans Jules Verne peine à utiliser le système métrique pourtant en vigueur en France. Peut-être est-ce par souci d’internationalisation ? En effet, ses héros sont quelques fois français mais aussi anglais, américains, ... Or la première puissance maritime à cette époque est anglo-saxonne et n’utilise pas le système métrique.

5. Si on suppose que l’unité utilisée par Jules Verne est “une lieue marine”, celle-ci vaut la vingtième partie de degré comptée sur un grand cercle de la Terre (Larousse classique) soit 5,56 km. “Vingt mille lieues sous les mers” correspondrait à “Cent onze mille kilomètres sous les mers”. Notez toutefois, que une *lieue kilométrique* vaut 4 km, une *lieue de poste* 3898 m et une *lieue terrestre* 4444 m.

6. n.m. Mesure itinéraire, qui valait chez les romains mille pas. — *Mille marin*, unité de longueur correspondant à la distance moyenne de deux points de la surface de la Terre qui ont même longitude et dont les latitudes diffèrent de 1 minute. Sa valeur est fixée conventionnellement à 1852 m. Son emploi est autorisé seulement en navigation aérienne ou maritime. (Larousse classique)

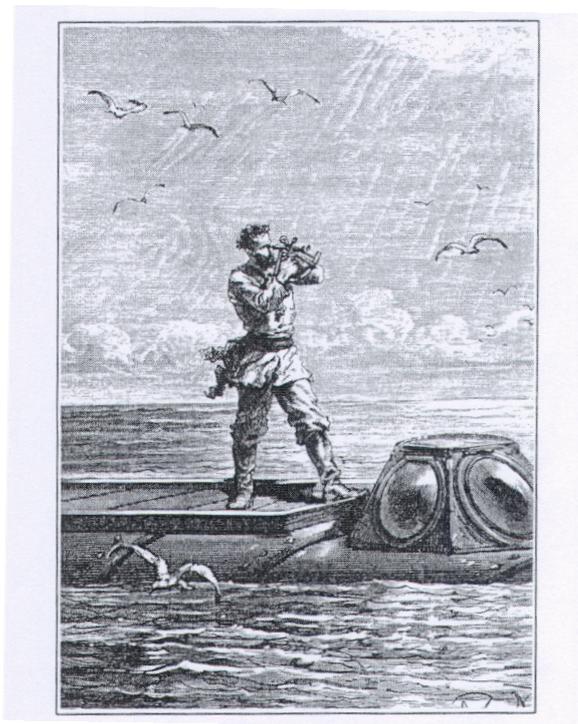


FIGURE 4.9 – “Le capitaine Némó prit la hauteur du soleil.” Extrait de “Vingt mille lieues sous les mers” de *Jules Verne* avec les dessins de *Neuville et Riou*.

- *Et maintenant, monsieur le professeur, ajouta le capitaine, je vous laisse à vos études. J'ai donné la route à l'est-nord-est par cinquante mètres de profondeur. Voici les cartes à grands points, où vous pourrez la suivre. Le salon est à votre disposition, et je vous demande la permission de me retirer.*”

Chapitre 5

Aberration et parallaxe

Dans cette section on va voir comment un observateur détermine à partir d'observations directes d'un astre, ses coordonnées, horizontale, horaire ou équatoriale. En effet, l'observateur se trouvant à la surface de la Terre, ses observations sont affectées par le mouvement de rotation de la Terre sur elle-même et par le mouvement de la Terre autour du Soleil¹. Il y a deux types de corrections, le premier vient de la vitesse de l'observateur, et la deuxième du changement de position. Le premier type s'appelle *l'aberration* et le deuxième la *parallaxe*.

5.1 Aberration

L'aberration est un effet géométrique qui affecte la direction apparente dans laquelle est observé un astre. Cette effet vient du mouvement relatif entre l'observateur et de la vitesse de la lumière qui a une valeur finie.

Cette vitesse relative induit aussi un effet Doppler-Fizeau. Mais cet effet est essentiellement spectroscopique, c'est-à-dire qu'il affecte les fréquences de la lumière perçue. Ce n'est pas l'objet de ce cours de traiter ce genre d'effet.

5.1.1 Etude classique

Dans ce cas on doit distinguer celui où l'astre est en mouvement de celui où l'observateur est en mouvement.

Astre en mouvement

Soit un astre occupant une position A à l'instant t et allant à une vitesse \mathbf{v} rectiligne uniforme par rapport à l'observateur. Lorsque la lumière de l'astre se trouvant

1. Le Soleil, et l'ensemble d'objets, dont la Terre, lui tournant autour, sont aussi en mouvement dans la Galaxie, mais on ne traitera pas ici ce genre de corrections qui dépendent beaucoup des approximations faites.

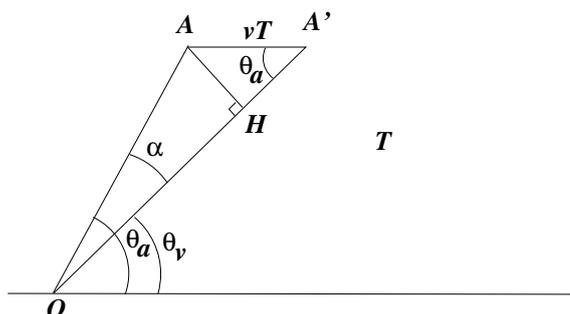


FIGURE 5.1 – Aberration pour un astre en mouvement.

en A aura atteint l'observateur en O il se sera écoulé un temps :

$$T = \frac{OA}{c},$$

où $c \approx 299\,792$ km/s est la vitesse de la lumière dans le vide. T est appelé le *temps d'aberration*.

A l'instant $t + T$, l'astre se trouve en un point A' tel que $\overrightarrow{AA'} = T\mathbf{v}$. A l'instant $t + T$, la direction OA' est la *ligne de visée vraie*, mais l'astre est vue suivant la ligne de visée *apparente* OA (voir la Fig. 5.1.1

L'angle α entre ces deux directions est appelé *angle d'aberration*. Dans le triangle plan OAA' , on a :

$$\sin \alpha = \frac{v}{c} \sin \theta_v,$$

où θ_v est l'angle du vecteur vitesse avec la ligne de visée vraie.

Observateur en mouvement

On considère maintenant un astre fixe A observé par un observateur O se déplaçant à une vitesse \mathbf{v} . A l'instant t de l'observation la ligne de visée vraie est OA , mais la ligne de visée apparente est différente.

En effet, si on suppose un cycliste se déplaçant à grande vitesse un jour de pluie sans vent, il aura l'impression que la pluie tombe de manière oblique, dirigée vers lui et non verticalement. La vitesse relative \mathbf{v}_r de la pluie par rapport au cycliste s'écrit alors :

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_a - \mathbf{v},$$

où \mathbf{v} est la vitesse du cycliste, ou vitesse d'entraînement, et \mathbf{v}_a la vitesse de la pluie par rapport au sol, ou vitesse absolue.

Si on suit ce raisonnement pour la lumière, se déplaçant à une vitesse c suivant la direction AO (vitesse absolue), pour l'observateur se déplaçant à la vitesse d'entraînement \mathbf{v} on aura :

$$\mathbf{v}_r = c \frac{\overrightarrow{AO}}{AO} - \mathbf{v}.$$

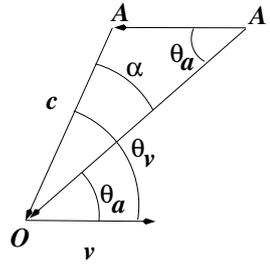


FIGURE 5.2 – Aberration pour un astre en mouvement.

Soit A' tel que $\overrightarrow{A'O} = c\frac{\overrightarrow{AO}}{AO} - \mathbf{v}$, alors dans le triangle OAA' on a la relation donnant l'angle d'aberration α (voir Fig. 5.1.1) :

$$\sin \alpha = \frac{v}{c} \sin \theta_a,$$

où θ_a est l'angle du vecteur vitesse \mathbf{v} avec la ligne de visée apparente.

5.1.2 Etude relativiste

D'après la relativité restreinte, il n'y a pas de repère absolu et seuls les mouvements relatifs (rectilignes et uniformes) importent. Donc les deux calculs précédents devraient donner la même formule, or ce n'est pas le cas. Un des deux au moins est erroné.

Le second calcul, combine des vitesses avec la vitesse de la lumière ce qui est interdit puisque la vitesse de la lumière est une constante indépendante du repère. La combinaison de vitesses doit donc se faire dans le cas relativiste.

Soit deux repères $(Oxyz)$ et $(O'x'y'z')$ déduit l'un de l'autre par un translation OO' parallèle à Ox . Le second repère est animé de la vitesse \mathbf{v}_o parallèle à Ox relativement au premier. L'instant où les deux repères sont confondus est pris comme origine des temps. Le passage des coordonnées spatio-temporelles $xyzt$ d'un événement dans le premier repère aux coordonnées $x'y'z't'$ du même événement dans le second repère, est donné par la transformation spéciale de Lorentz :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix},$$

où $\beta = v_o/c$ et $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

Le mouvement d'un point est caractérisé, dans le second repère, par des fonctions x' , y' et z' de t' . On peut en déduire le mouvement dans le repère $(Oxyz)$ par la

transformation de Lorentz. On a, en particulier :

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \\ c \end{pmatrix} \frac{dt'}{dt}.$$

Ce qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{v_o v'_x}{c^2}\right)} \begin{pmatrix} \gamma(v'_x + v_o) \\ v'_y \\ v'_z \\ c \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

$$c = \gamma c \left(1 + \frac{v_o v'_x}{c^2}\right) \frac{dt'}{dt}. \quad (5.2)$$

Ce sont donc les relations de compositions valables dans tous les cas.

Dans notre cas, le premier repère est celui où l'axe est fixe et le second celui où l'observateur est fixe, \mathbf{v}_o est la vitesse de l'observateur par rapport aux astres et \mathbf{v} et \mathbf{v}' la vitesse de la lumière allant de A vers O dans le premier et dans le second repère respectivement.

On prend le plan (Oxy) tel qu'il contienne le point A . Ainsi v_z et v'_z sont nulles. Pour le reste on a :

$$\begin{aligned} v_x &= -c \cos \theta_v, & \text{et} & & v'_x &= -c \cos \theta_a, \\ v_y &= -c \sin \theta_v. & & & v'_y &= -c \sin \theta_a. \end{aligned}$$

En appliquant la transformation de Lorentz, les angles θ_v et θ_a sont liés par la relation :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_v \\ \sin \theta_v \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma(1 - \beta \cos \theta_a)} \begin{pmatrix} \gamma(\cos \theta_a - \beta) \\ \sin \theta_a \end{pmatrix}.$$

Ainsi l'angle d'aberration est donné par :

$$\sin \alpha = \sin(\theta_v - \theta_a) = \frac{\beta \sin \theta_a - \frac{\gamma-1}{\gamma} \sin \theta_a \cos \theta_a}{1 - \beta \cos \theta_a}.$$

Pour les étoiles, leur vitesse relative au Soleil est de l'ordre de quelques dizaines de kilomètres par seconde. Ainsi β est de l'ordre de 10^{-4} . Au premier ordre en β ou β^2 on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \beta \cos \theta_a} &\approx 1 + \beta \cos \theta_a, \\ \frac{\gamma - 1}{\gamma} &\approx \frac{\beta^2}{2}. \end{aligned}$$

Donc, à l'ordre 2 en β on a :

$$\sin \alpha \approx \beta \sin \theta_a + \frac{\beta^2}{2} \sin \theta_a \cos \theta_a.$$

On voit que $\sin \alpha$ est de l'ordre de β . Dans ce cas on peut assimiler $\sin \alpha$ et α , avec une erreur de l'ordre de 10^{-12} ce qui est parfaitement négligeable. On a donc pour les étoiles un angle d'aberration de l'ordre de $20''$ (10^{-4} rad).

Si on continue ce raisonnement, on peut donc assimiler θ_v et θ_a avec une erreur relative de l'ordre de 10^{-4} . On obtient finalement la formule suivante :

$$\alpha = \frac{v}{c} \sin \theta,$$

qui donne α avec une erreur de l'ordre de 10^{-8} , où θ est θ_v ou θ_a .

Enfin, si l'on désigne par v_t la composante de la vitesse \mathbf{v} orthogonale à la ligne de visée, alors $v_t = v \sin \theta$ ainsi :

$$\alpha = \frac{v_t}{c}.$$

Cas du mouvement non uniforme

Dans ce cas, la relativité restreinte devient insuffisante puisque qu'elle ne s'applique pas au cas de repère en mouvement accéléré l'un par rapport à l'autre. Cependant, dans le cas de l'observateur en déplacement non uniforme, comme par exemple un observateur à la surface de la Terre, seule la vitesse au moment de l'observation compte. L'accélération n'intervient pas. Ainsi les formules précédentes restent valables.

Dans le cas d'un astre en mouvement, on compare deux instants différents séparés par le temps d'aberration T , le premier étant l'instant où la lumière est émise, et l'instant où elle est perçue. On n'a *a priori* aucune idée sur le mouvement de l'astre (étoile, planète, etc.) pendant cet intervalle de temps. Ainsi on ne peut pas vraiment calculer l'angle d'aberration, on considère plutôt que la direction observée à l'instant $t + T$, qui est donc la direction apparente, correspond à la direction de l'astre à l'instant t . On corrige simplement l'aberration venant du mouvement de l'astre en anticiplant l'observation du période égale au temps d'aberration T .

Ceci est effectivement fait pour les objets du système solaire, mais a moins de sens pour les étoiles, pour lesquelles la correction n'est pas intéressante surtout du fait que le temps d'aberration peut être mal, voire pas, connu (on a besoin de la distance).

5.2 Construction de la position apparente

Sur une sphère on représente les lignes de visée vraies et apparente ainsi que la direction de la vitesse de l'observateur \mathbf{v} par les points A , A' et V respectivement. Ces trois points définissent un grand cercle. Le point A' est tel que l'arc $\widehat{AA'}$ est dirigé vers V et est égal à l'angle d'aberration $\alpha = v_t/c$ (voir Fig. 5.2).

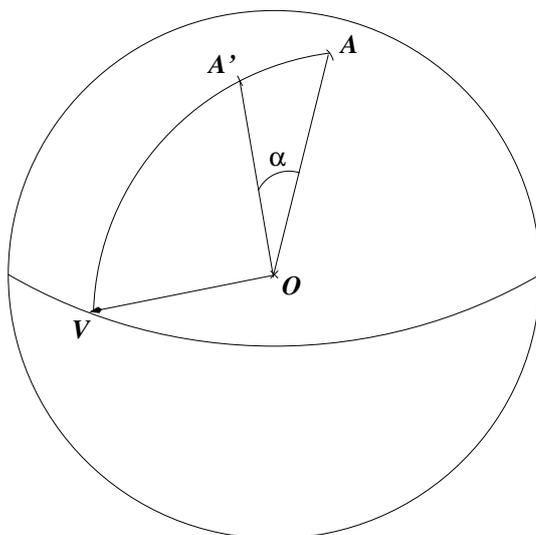


FIGURE 5.3 – Direction des lignes de visée et de la vitesse sur la sphère des fixes.

5.2.1 Aberration diurne

Tout observateur terrestre est entraîné par le mouvement de rotation de la Terre sur elle-même avec une vitesse tangente au parallèle terrestre, dirigée vers l'Est. A l'équateur cette vitesse vaut $v_o = 465,11$ m/s.

A la latitude ϕ , la vitesse est $v = v_o \cos \phi$. Sur la sphère locale, le vecteur vitesse de l'observateur est dirigé vers le point cardinal Est de l'horizon céleste. La position apparente A' se déduit donc par la position vraie A en portant un arc de cercle $\alpha = v/c$ vers l'Est (voir la Fig. 5.2.1).

Ainsi, l'aberration diurne ne modifie que l'azimut si l'astre est sur l'horizon et ne modifie que la hauteur si il a une azimut égale à $\pm 90^\circ$.

Pour un astre au méridien d'origine des coordonnées horaires (appelé aussi méridien supérieur) ou au méridien opposé (appelé méridien inférieur), l'arc $\widehat{AA'}$ se confond pratiquement avec un arc de parallèle. Elle corrige donc au premier ordre l'azimut, et la hauteur au second ordre seulement.

Toujours dans le cas d'un passage au méridien l'angle θ entre la ligne de visée et la vitesse est de 90° , et l'angle d'aberration se réduit à :

$$\alpha = \frac{v}{c} = \frac{v_o \cos \phi}{c}.$$

Il est le même, en un lieu donné, pour tous les astres observés. Sa valeur à l'équateur vaut :

$$\frac{v_o}{c} = 0'',320 = 21,3 \text{ ms.}$$

A notre latitude, l'aberration diurne ne dépasse pas 14 ms. Elle est dirigée de telle sorte que la position apparente passe au méridien après la position vraie si il s'agit

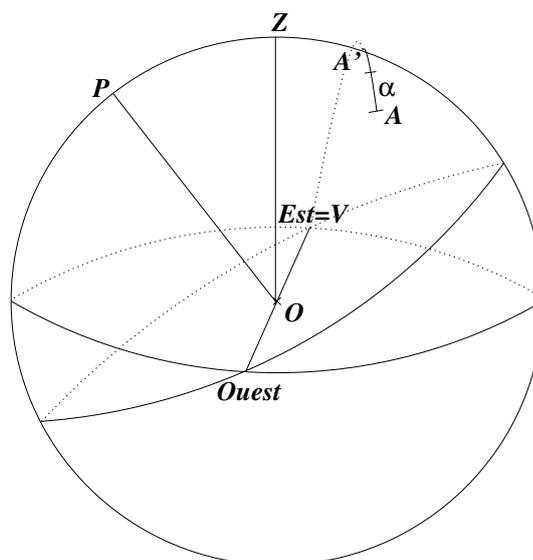


FIGURE 5.4 – Aberration diurne.

d'un passage au méridien supérieur, et avant pour le méridien inférieur. On doit donc, dans les observations méridiennes, apporter une correction dite d'*aberration diurne*.

Il faut noter que l'angle d'aberration α , ne correspond pas à la correction en temps ou en angle horaire (qui dépend de la déclinaison δ dans ce cas).

5.2.2 Aberration annuelle

Tout observateur terrestre est aussi entraîné par la Terre dans son mouvement autour du Soleil. En assimilant l'orbite de la Terre à un cercle de rayon $1 \text{ UA} \approx 150 \cdot 10^6 \text{ km}$, parcourue à vitesse constante en une année sidérale, sa vitesse vaut $v = 29,77 \text{ km/s}$.

Il en résulte une *aberration annuelle* dont la valeur maximale (pour une ligne de visée perpendiculaire à la vitesse) :

$$\alpha_o = \frac{v}{c} = 20'',48.$$

Soit A la position vraie d'une étoile. D'après nos hypothèses la vitesse de l'observateur est perpendiculaire à la direction OS où S désigne la direction du Soleil sur l'écliptique. La direction de cette vitesse est opposée à la direction du déplacement du Soleil sur l'écliptique. Ainsi, on voit que le point V correspondant à la direction de la vitesse, est en retard de 90° sur le Soleil (voir Fig. 5.2.2). La position apparente A' de l'étoile se déduit alors en rapportant un arc d'angle $\alpha = \frac{vt}{c}$ dans la direction de V .

Pour une étoile A , dont la ligne de visée est perpendiculaire à la vitesse on a simplement $\alpha = \alpha_o$. Sinon, il faut considérer la projection de la vitesse sur le plan

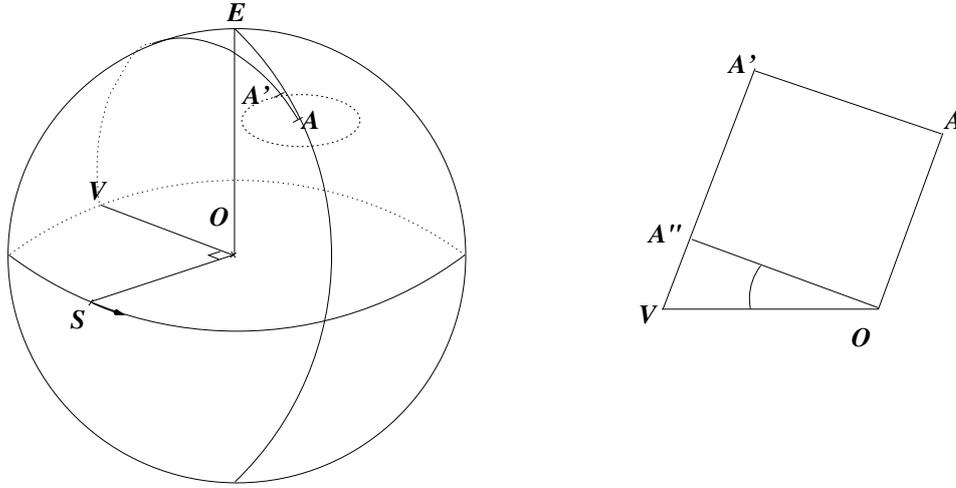


FIGURE 5.5 – Aberration annuelle.

tangent en A à la sphère afin d'avoir la vitesse transversale v_t . Si on représente la vitesse \mathbf{v} par le vecteur \overrightarrow{OV} , et la vitesse \mathbf{v}_t par le vecteur $\overrightarrow{AA'}$. Soit A'' tel que $\overrightarrow{OA''} = \overrightarrow{AA'}$ alors (voir Fig. 5.2.2, droite) $v_t = v \cos \widehat{VOA''} = v \cos(\widehat{AOV} - \pi/2)$, soit $v_t = v \sin \widehat{AOV}$.

Ainsi :

$$\alpha = \alpha_o \sin AOV. \quad (5.3)$$

A' tourne en même temps que S et dans le même sens. En un an S , et donc V , va parcourir tout l'écliptique, ainsi A' va parcourir une courbe fermée autour de la position vraie A' . En fait il s'agit, à une homothétie près, de la projection de la trajectoire du vecteur vitesse (appelée *hodographe*) sur le plan tangent à la sphère en A . Dans notre cas, la trajectoire est un cercle, donc sa projection est une ellipse. A' décrit donc une ellipse de centre A . Le demi-grand axe de l'ellipse pour toutes étoiles est correspond à α_o . Son petit axe est d'autant plus petit que l'angle \widehat{AOV} peut être petit. Il est obtenue lorsque V est dans le plan du méridien (de l'écliptique) passant par l'étoile A et ce petit axe sera d'autant plus petit que l'étoile sera proche de l'écliptique. Pour une étoile sur l'écliptique, le petit axe est égale à zéro. Pour une étoile au pôle de l'écliptique, A' décrit cette fois un cercle de rayon α_o .

5.3 Parallaxe

5.3.1 Définition

Jusqu'à maintenant on a toujours considéré que la direction d'une ligne de visée pour un objet donné était indépendante du point d'observation. Seule la vitesse du

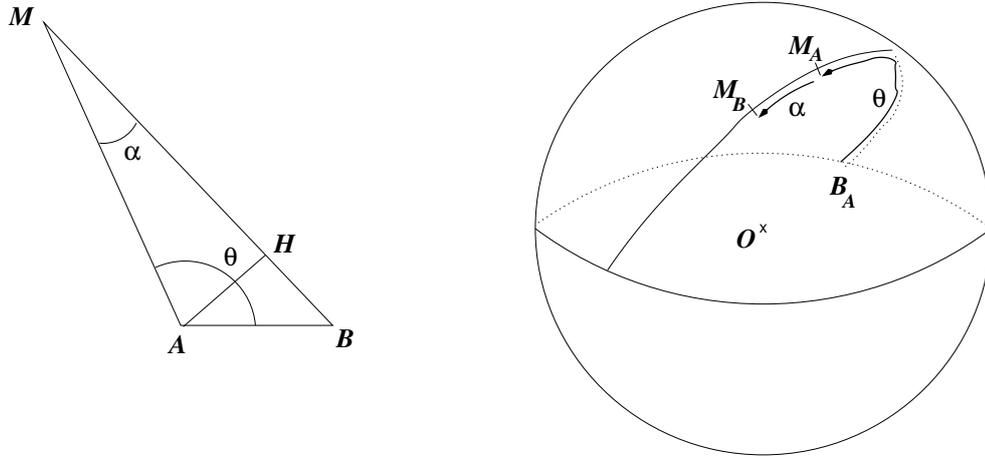


FIGURE 5.6 – Parallaxe.

point d'observation joue un rôle dans l'aberration mais pas sa position. Autrement dit, on a toujours considéré que les lignes de visée vraies pour un observateur sur Terre, à n'importe quel endroit, au centre de la Terre, au centre du Soleil, avaient la même direction. Cette approximation est valide dans l'hypothèse où les objets observés sont très lointains, et donc ces lignes de visée vraies sont toutes parallèles. Lorsqu'on les rapporte sur la sphère céleste centrée sur l'observateur elles correspondent au même point de la sphère.

Si un astre est à une distance finie (ce qui est toujours le cas), la direction dans laquelle il est observée dépend du point d'observation. Soit M un astre se trouvant à une distance D d'un observateur A , et soit B un autre lieu d'observation. La *parallaxe* correspond à l'angle entre les directions $[MA)$ et $[MB)$. Soit $\alpha = \widehat{AMB}$ cet angle. On note θ l'angle \widehat{MAB} . Dans le triangle plan MAB , en considérant la projection H de A sur le côté MB (voir Fig. 5.3.1), on a :

$$AH = D \sin \alpha = AB \sin(\pi - \alpha - \theta) = AB \sin(\alpha + \theta).$$

Soit :

$$\frac{\sin \alpha}{AB} = \frac{\sin(\alpha + \theta)}{D}.$$

Si D est grand, et α petit, cette relation devient :

$$\alpha \approx \frac{AB}{D} \sin(\alpha + \theta) \approx \frac{AB}{D} \sin \theta. \quad (5.4)$$

Si on représente sur une sphère céleste, toujours centrée au lieu d'observation, on a la direction M_A de l'étoile M vue de A et la direction M_B de l'étoile vue de B . On peut aussi représenter la direction B_A de B vu du point A . Les points M_A , M_B et B_A sont sur un grand cercle. Sur la sphère on a $\theta = \widehat{B_A M_A}$ et l'angle de parallaxe $\alpha = \widehat{M_A M_B}$. On remarque que, contrairement à l'angle d'aberration qui correspondait

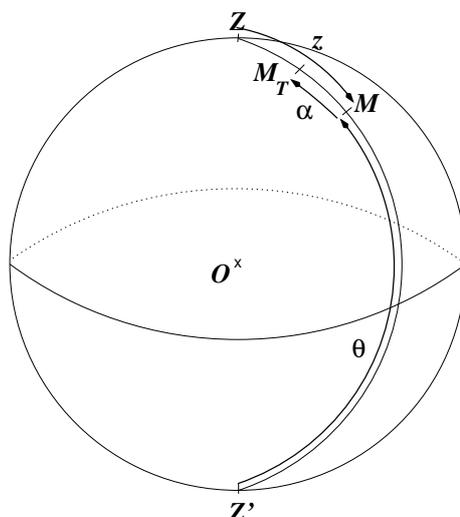


FIGURE 5.7 – Parallaxe terrestre.

à une déviation dans le sens de la vitesse, la parallaxe induit une déviation se faisant dans le sens inverse du déplacement.

5.3.2 Parallaxe terrestre

On s'intéresse ici au décalage induit par le fait qu'un observateur terrestre se trouve à la surface de la Terre et non en son centre. On considère donc deux lignes de visée pour un même astre M , celle depuis l'observateur, qui correspond à la *position locale* et celle depuis le centre de la Terre qui correspond à la *position géocentrique* de l'astre. Par rapport à la Fig. 5.3.1, le point A est la position locale, et le point B correspond au centre de la Terre. En supposant la Terre sphérique², depuis un observateur O à la surface de la Terre, la direction du centre de la Terre est la direction du Nadir. Donc la position géocentrique sera représentée par le point M_T se trouvant sur le méridien passant par la position locale M tel que l'arc $\widehat{MM_T} = \alpha$ dans la direction du Zénith (voir Fig. 5.3.2).

Toutes les positions des objets qui sont publiées dans les catalogues, sont bien évidemment des positions géocentriques, donc lors d'une observation réelle, les astres sont observés plus bas sur l'horizon que ce que donne les positions géocentriques publiées. On dit que la parallaxe terrestre rabaisse les astres.

En considérant que la parallaxe est de toute manière petite, on peut utiliser l'approximation donnée par l'équation (5.4). Ainsi :

$$\alpha \approx RD \sin z,$$

2. Dans le cas d'une Terre ellipsoïdale, il peut y avoir un décalage entre la direction du centre de la Terre et le Nadir de l'ordre de $11'35''$. Certaines conclusions de ce paragraphe changent dans ce cas. En particulier la parallaxe terrestre modifie aussi l'azimut.

où D est le rayon de la Terre, que l'on suppose sphérique, et z la distance zénithale de la position locale.

On en déduit que la parallaxe terrestre ne modifie pas l'azimut d'un astre. Elle ne modifie que sa hauteur sur l'horizon, et ce d'autant plus que l'astre est proche de l'horizon. Cette parallaxe maximale α_M s'appelle la *parallaxe horizontale*.

Pour la Lune, on ne peut pas considérer α comme petit. On doit préciser que la parallaxe est maximale lorsque la distance zénithale de la position locale est égale à 90° . Dans ce cas on a :

$$\sin \alpha_m = \frac{R}{D}.$$

α_m , correspond au rayon apparent de la Terre vue depuis la Lune et vaut $57'$. Même dans ce cas, l'erreur faite entre α et $\sin \alpha$ correspond à $0,15''$.

Ainsi, la Lune locale est déjà couchée alors que la Lune géocentrique, qui correspond à la Lune vue depuis le centre de la Terre, ne l'est pas (pour autant que ça ait du sens de parler d'un astre couché vu depuis le centre de la Terre...). Cependant, la réfraction a un effet opposée à la parallaxe. On ne va pas l'expliquer ici, mais la réfraction a pour effet de *relever* les astres au dessus de l'horizon d'un angle de l'ordre de $36'$ à l'horizon. Ici on observe encore un astre qui est déjà géométriquement couché.

5.3.3 Parallaxe en coordonnées horaires

Soit un astre M se trouvant à une distance D_T du centre de la Terre de coordonnées équatoriales α_T, δ_T . Soit un observateur O se trouvant à la surface de la Terre en un lieu de latitude ϕ . Les coordonnées horaires locales de l'astre M sont (H_O, δ_O) . Le temps sidéral local θ supposé connu, permet de déterminer l'angle horaire géocentrique H_T de l'étoile. On note $\Delta H = H_O - H_T$ et $\Delta \delta = \delta_O - \delta_T$ les corrections à apporter aux coordonnées horaires géocentriques pour obtenir les coordonnées horaires locales.

Soit M_O la position locale de l'astre et M_T sa position géocentrique. On appelle K le point du méridien passant par M_O tel que l'arc $\widehat{KM_T}$ soit perpendiculaire en K au méridien passant par M_O (voir Fig. 5.3.3).

Dans le triangle sphérique PM_TK , la formule des sinus nous donne :

$$\sin \Delta H \sin \left(\frac{\pi}{2} - \delta_T \right) = \sin \widehat{M_T K} \quad (5.5)$$

Dans le triangle $KM_O M_T$, la formule des sinus donne :

$$\sin \widehat{M_T K} = \sin \alpha \sin \widehat{M_T M_O K} = \frac{R}{D} \sin z \sin \widehat{M_T M_O K} \quad (5.6)$$

Or, dans le triangle $PM_O Z$, on a :

$$\sin z \sin \widehat{M_T M_O K} = \sin H_O \sin \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) \quad (5.7)$$

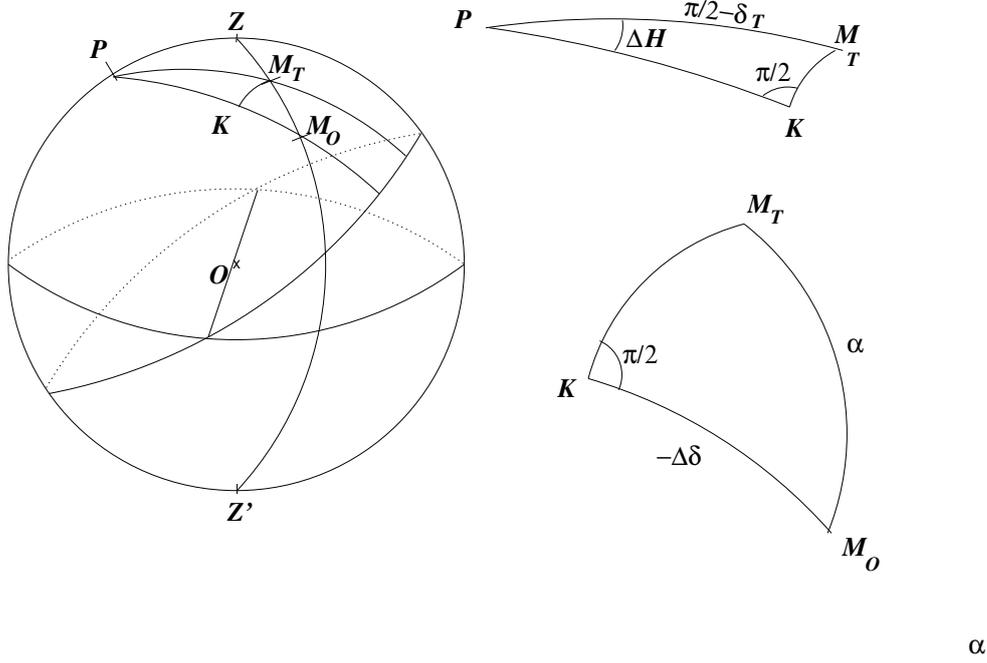


FIGURE 5.8 – Parallaxe terrestre et angle horaire.

En identifiant les Eqs. (5.5) et (5.6), puis en utilisant l'Eq. (5.7), on obtient :

$$\sin \Delta H \cos \delta_T = \frac{R}{D} \sin H_O \cos \phi \quad (5.8)$$

Mais, on souhaite avoir ΔH en fonction des coordonnées géocentriques. Donc on doit remplacer H_O par $H_T + \Delta H$. Ainsi, l'Eq. (5.8) devient (en se limitant au premier ordre en ΔH et en R/D) :

$$\begin{aligned} \sin \Delta H \cos \delta_T &= \frac{R}{D} \sin(H_T + \Delta H) \cos \phi \\ \Delta H \cos \delta_T &= \frac{R}{D} (\sin H_T + \cos H_T \Delta H) \cos \phi \\ \Delta H &= \frac{R \sin H_T \cos \phi}{D \cos \delta_T} \frac{1}{1 - \frac{R \cos H_T \cos \phi}{D \cos \delta_T}} \\ \Delta H &= \frac{R \sin H_T \cos \phi}{D \cos \delta_T} \quad (5.9) \end{aligned}$$

Dans le triangle $M_T M_O K$, on a :

$$\sin \alpha \cos \widehat{M_T M_O K} = -\cos M_T K \sin \Delta \delta \quad (5.10)$$

Or, l'arc $\widehat{M_T K}$ est petit, donc on peut écrire :

$$\cos \widehat{M_T K} = \sqrt{1 - \sin^2 M_T K}.$$

En utilisant l'équation (5.5), et en effectuant un développement limité, on a :

$$\cos \widehat{M_T K} \approx 1 - \frac{\sin^2 \Delta H \cos^2 \delta_T}{2}.$$

Ainsi, en s'arrêtant au première ordre en ΔH , on peut supposer que $\cos \widehat{M_T K} \approx 1$.

Pour le calcul de $\cos \widehat{M_T M_O K} = \cos \widehat{Z M_O P}$, on se place dans le triangle $M_O Z P$. On a alors :

$$\sin z \cos \widehat{Z M_O P} = \sin \phi \cos \delta_O - \cos \phi \sin \delta_O \cos H_O.$$

En remplaçant $\sin \alpha$ par $R/D \sin z$ dans l'équation 5.10, on obtient donc :

$$\sin \Delta \delta = \frac{R}{D} (\cos \phi \sin \delta_O \cos H_O - \sin \phi \cos \delta_O).$$

Comme pour ΔH , si on se limite au premier en R/D , on a :

$$\Delta \delta = \frac{R}{D} (\cos \phi \sin \delta_T \cos H_T - \sin \phi \cos \delta_T). \quad (5.11)$$

Les équations 5.9 et 5.11 sont donc les corrections à faire aux coordonnées horaires géocentriques publiées pour avoir les coordonnées horaires locales.

5.3.4 Détermination géométrique de la distance d'un astre

On considère deux points A et B de la surface de la Terre, de latitude respective ϕ_A et ϕ_B et de même longitude. Un astre E , se trouvant à une distance D de A , est observé simultanément lors du passage au méridien.

On se place dans le plan du méridien, au moment du passage de l'étoile, et on suppose la Terre sphérique (elle est donc assimilée au Globe terrestre). Vue de la direction Ouest, qui est la même pour A et B puisqu'ils ont la même longitude, on compte tous les angles positivement dans le sens direct. On note Z_A et Z_B la direction des zéniths des points A et B respectivement, et z_A et z_B la distance zénithale de l'astre M avec la convention ci-dessus pour son sens. On suppose aussi que $\phi_A > \phi_B$ (i.e. A est plus au nord que B).

Au centre de la Terre T , on reporte les directions $[AE)$ et $[BE)$. Soit E_A et E_B des points permettant de représenter ces directions à partir de T (voir la Fig. 5.3.4).

La relation de Chasles nous permet d'écrire :

$$\widehat{BTA} = \widehat{BTE_B} + \widehat{E_BTE_A} + \widehat{E_ATA}.$$

Or $\widehat{BTA} = \phi_A - \phi_B$, $\widehat{BTE_B} = z_B$, $\widehat{E_BTE_A} = -\alpha$ et $\widehat{E_ATA} = -z_A$. Ainsi, en posant $\Delta \phi = \phi_A - \phi_B$ et $\Delta z = z_A - z_B$, on a :

$$\alpha = -(\Delta \phi + \Delta z).$$

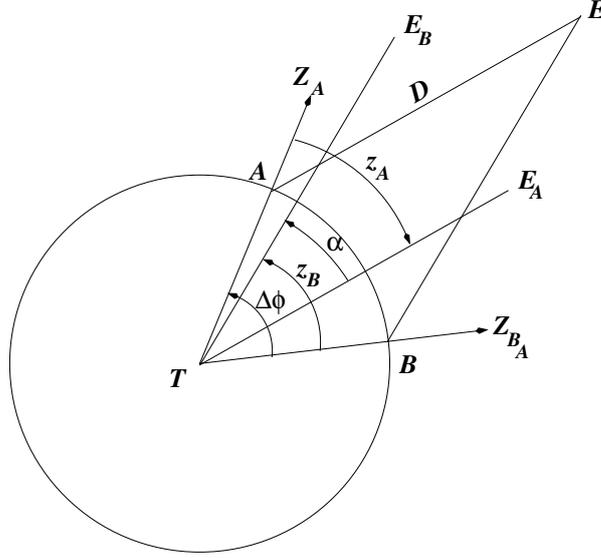


FIGURE 5.9 – Calcul de distance par parallaxe.

Or, on a vu que, si D est grand (disons plus loin que la Lune, et pour la Lune l'erreur est de $0,15''$) :

$$\alpha = \frac{AB}{D} \sin \theta,$$

où $\theta = \widehat{BAE}$.

Dans le triangle TAB isocèle en T , on a $x = \widehat{TA} = \frac{\pi - \Delta\phi}{2}$. Comme $\theta = \widehat{BAE} = \widehat{BAZ_A} + \widehat{Z_AAE} = \pi - x + z_A$, on a :

$$\theta = \frac{\pi + \Delta\phi}{2} + z_A.$$

De plus :

$$AB = 2R \sin \frac{\Delta\phi}{2},$$

où R est le rayon de la Terre. On obtient finalement :

$$\frac{D}{R} = \frac{2}{\alpha} \sin \frac{\Delta\phi}{2} \cos \left(\frac{\Delta\phi}{2} + z_A \right). \quad (5.12)$$

Ce qui nous permet de calculer la distance de l'astre E en fonction du rayon de la Terre.

Pour la Lune, on trouve $D = 60.268 R = 384\,400$ km (ce qui correspond, comme on l'a vu, à une parallaxe maximale $\alpha_m = 57'2,45''$). Pour le Soleil, on a $D = 23\,455 R = 149\,600\,000$ km et $\alpha_m = 8,794''$.

La présence de α au dénominateur dans l'équation 5.12 induit que le calcul de distance par cette méthode est d'autant moins précis que l'astre est éloigné.

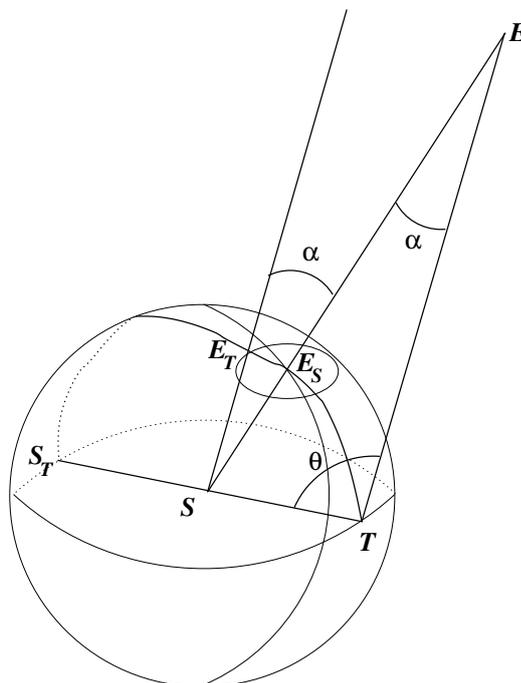


FIGURE 5.10 – Parallaxe annuelle des étoiles.

Dans le système solaire, on a intérêt à l'utiliser pour les planètes proches, comme Venus ou Mars, la distance des autres planètes s'en déduit grâce aux lois de la mécanique céleste qui nous permettent d'avoir les rapports de distance.

Pour les étoiles, α est beaucoup trop petit voire pas mesurable. On utilise alors la parallaxe annuelle.

5.3.5 Parallaxe annuelle des étoiles

Soit E une étoile se trouvant à une distance D de la Terre (E n'étant pas le Soleil). Lorsque la Terre parcourt son orbite, l'étoile E va être vue dans des directions différentes. En considérant un observateur fictif S centré sur le Soleil, on considère la ligne de visée SE de cette étoile vue depuis cet observateur. On considère aussi la ligne de visée $[SE_T]$ qui est parallèle à la ligne de visée $[TE]$ (voir la Fig. 5.3.5). Le point S_T de la sphère céleste centrée sur S correspond à la direction dans laquelle est vu le Soleil depuis la Terre. Le point E_T se trouve donc sur l'arc de grand cercle $TE_S S_T$ tel que l'arc $\widehat{E_S E_T} = \alpha$, dirigé vers le point S_T . On notera que les points S , T , E , E_S , E_T et S_T sont coplanaires.

On a :

$$\alpha = \frac{ST}{D} \sin \theta,$$

où $\theta = \widehat{S_T S E}$.

On a ici une formule équivalente à celle obtenue pour l'angle d'aberration annuelle donnée par l'équation 5.3. Ainsi, lorsque la Terre décrit son orbite, que l'on suppose circulaire, le point E_T décrit, à une homothétie près, la projection de l'orbite de la Terre sur le plan tangent à la sphère céleste en E_S . C'est une ellipse, appelée *ellipse de parallaxe*.

Le demi-grand axe correspond à $\sin \theta = \pi/2$, donc lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire que la Terre se trouve sur un des points de l'écliptique tel que la direction $[ST]$ soit orthogonale au méridien de l'écliptique passant par E_S . On dit dans ce cas que l'étoile est en quadrature avec le Soleil. Dans ce cas on a simplement :

$$\alpha_{\max} = \frac{ST}{D}.$$

Le demi-petit axe correspond au cas où θ est minimal (ou $\pi - \theta$ maximal), c'est-à-dire quand S_T se trouve dans le méridien de l'écliptique passant par E_S . Dans ce cas $\theta = b$ (ou $\pi - \theta = b$) où b est la latitude écliptique de l'étoile.

On remarque donc que la taille du demi-grand axe de l'ellipse est inversement proportionnelle à la distance de l'étoile. Ce qui n'était pas le cas pour l'ellipse de l'aberration annuelle dont le demi-grand axe était le même pour toutes les étoiles (environ 20,49").

Pour toute étoile, il y a deux positions de quadrature espacées de 6 mois. Pour mesurer le grand axe de l'ellipse, qui est directement relié à la distance de l'étoile, on compare les positions relative de l'étoiles relevées au moment des quadratures par rapport à un fond d'étoiles supposées beaucoup plus lointaine. Ainsi toutes les étoiles sont affectées par le même angle d'aberration, et les positions relatives de l'étoile nous donnera directement le grand axe de l'ellipse de parallaxe et donc sa distance.

Pour l'étoile la plus proche, Proxima du Centaure, sa parallaxe est de 0.76". On voit ici que c'est un angle beaucoup plus petit que l'angle d'aberration typique. Cet angle est comparable au mouvement propre des étoiles, c'est-à-dire au déplacement des étoiles sur la sphère des fixes. Ainsi, pour bien mesurer une parallaxe, on doit corriger de ce mouvement propre en relavant de nouveau la position de l'étoile à une des deux quadratures mais à un an d'intervalle. Ainsi le décalage observé sur la position de l'étoile sur ces deux relevés espacé d'un an permet d'en déduire le mouvement propre (il n'y a pas d'angle de parallaxe puisque les relevés ont été faits pour une Terre à la même position sur son orbite).

Au moment d'une quadrature, dans le triangle rectangle STE en T , on a :

$$RD = \tan \alpha.$$

Mais, comme on vient de la voir α est très petit, ainsi $\tan \alpha \approx \alpha$, ainsi :

$$D = \frac{R}{\alpha},$$

où α est mesuré en radian et R et D dans les mêmes unités de longueur. Si on choisi le seconde d'arc pour α , et l'unité astronomique comme unité de longueur ($R = 1$ UA)

on a :

$$D \text{ (UA)} = \frac{206\,265 \text{ ("} \cdot \text{rad}^{-1})}{\alpha \text{ (")}} 1(\text{UA}).$$

Si on définit alors une nouvelle unité de longueur appelée *parsec* (pc), telle que $1 \text{ pc} = 206\,265 \text{ UA}$, alors la relation précédente devient :

$$D \text{ (pc)} = \frac{1}{\alpha \text{ (")}}.$$

Proxima du Centaure se trouve donc à $1/0.76 = 1.32 \text{ pc} = 271\,400 \text{ UA}$.

Cette méthode est la méthode la plus précise pour calculer les distances d'étoiles proches (ce qui permet de bien paramétrer d'autres méthodes indirectes de calcul de distance). Cependant elle atteint rapidement sa limite du fait des parallaxes très faibles qu'on doit mesurer. Dans les années 90, le satellite Hipparcos a pu mesurer la parallaxe de plus d'un million d'étoiles au voisinage du Soleil. Sa précision était de $0,002''$, ainsi il a pu mesurer la distance d'étoile jusqu'à 500 pc environ.

En ce moment, le satellite GAIA est en train de scanner le ciel (depuis un an et pendant encore 4 ans). Sa précision est 100 fois supérieure à celle d'Hipparcos (en plus d'une sensibilité bien plus grande). Ainsi, c'est jusqu'à 50 000 pc que GAIA pourra déterminer les distances : il pourra déterminer la distance d'une étoile brillante se trouvant de l'autre côté de la Galaxie.

Annexe A

Le problème des deux corps

A.1 Formulation

On se donne un repère galiléen défini par le repère orthonormé suivant : $\mathfrak{R}_O = (Oxyz)$.

Soient deux points $M_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ de masses respectives m_1 et m_2 . Ces deux particules matérielles s'attirent selon la loi de Newton :

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_1}}{dt^2} &= -K \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\overrightarrow{M_2 M_1}}{r} \\ m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_2}}{dt^2} &= -K \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{r} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

où $r = M_1 M_2$ est la distance mutuelle et K la constante de gravitation universelle. (A.1) est un système différentiel d'ordre 2 avec 6 degrés de liberté. La résolution de ce problème d'ordre 12 nécessite donc d'introduire 12 constantes d'intégration arbitraires.

En ajoutant les deux équations de (A.1), on obtient $\frac{d^2(m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2})}{dt^2} = \vec{0}$. En introduisant le point G centre de gravité de M_1 et M_2 et si $m_1 + m_2 \neq 0$, cette dernière expression devient $\frac{d^2 \overrightarrow{OG}}{dt^2} = \vec{0}$. Le mouvement de G est donc rectiligne et uniforme. Sur les 12 constantes arbitraires, 6 définissent ce mouvement (3 pour la position initiale de G , et 3 sa vitesse).

Le point O du repère : $\mathfrak{R}_O = (Oxyz)$ peut ainsi être pris en G . En utilisant $\overrightarrow{M_2 M_1} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \overrightarrow{GM_1}$ et $\overrightarrow{M_1 M_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \overrightarrow{GM_2}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \overrightarrow{GM_1}}{dt^2} &= -K \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\overrightarrow{GM_1}}{(GM_1)^3} \\ \frac{d^2 \overrightarrow{GM_2}}{dt^2} &= -K \frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\overrightarrow{GM_2}}{(GM_2)^3} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Pour pouvoir écrire la première équation, on a simplifié les deux membres de l'égalité par m_1 . Cela signifie que m_1 doit être non nulle. De la même manière m_2 doit être elle aussi non nulle.

remarque :

Il n'est nécessaire de résoudre que l'une ou l'autre des deux équations car, par exemple, le mouvement de M_2 se déduit de celui de M_1 par $\overrightarrow{GM_2} = -\frac{m_1}{m_2}\overrightarrow{GM_1}$.

Le point G n'est pas un point physique dans le sens où il ne s'observe pas mais se calcule. C'est le mouvement relatif de M_1 autour de M_2 qui est observé :

En soustrayant les deux équations de (A.1), toujours après avoir simplifié les deux membres de l'égalité par m_1 ou m_2 , on obtient :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{M_2 M_1}}{dt^2} = -K(m_1 + m_2) \frac{\overrightarrow{M_2 M_1}}{(M_2 M_1)^3} \quad (\text{A.3})$$

le problème képlérien :

(A.2) et (A.3) peuvent s'écrire :

$$\boxed{\frac{d^2 \overrightarrow{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\overrightarrow{r}}{r^3}} \quad (\text{A.4})$$

où $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$ et $\mu > 0$. C'est le problème de Képler.

A.2 Invariance du moment cinétique et de l'énergie

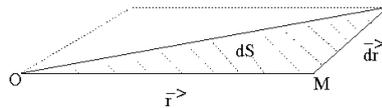
Plan de l'orbite et loi des aires

Par l'équation (A.4), on a la relation suivante qui est vraie pour toute force centrale : $\overrightarrow{r} \wedge \frac{d^2 \overrightarrow{r}}{dt^2} = \overrightarrow{0}$, que l'on peut encore écrire $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{r} \wedge \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}) = \overrightarrow{0}$, c'est à dire :

$$\boxed{\overrightarrow{r} \wedge \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \overrightarrow{G} \quad (\text{Cste})} \quad \text{invariance du moment cinétique} \quad (\text{A.5})$$

Les vecteurs \overrightarrow{r} et $\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}$ seront donc toujours orthogonaux à \overrightarrow{G} . Ce qui signifie que, si $\overrightarrow{G} \neq \overrightarrow{0}$, le mouvement se fait dans le plan passant par le point O et orthogonal à \overrightarrow{G} .

De plus, si on note dS l'élément d'aire parcouru par le rayon vecteur \overrightarrow{r} pendant l'élément de temps dt ,



on a $Gdt = 2dS$ puisque $\left\| \overrightarrow{r} \wedge \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} \right\| = Gdt$. Ce qui donne la loi des aires : $\frac{dS}{dt} = G/2$ (=Cste). Ainsi, l'orientation de \overrightarrow{G} indique le plan du mouvement et son module

donne la loi des aires. Si $\vec{G} = \vec{0}$, le mouvement est rectiligne et porté par la direction commune de \vec{r} et $\frac{d\vec{r}}{dt}$.

Energie d'une orbite

En remarquant que $\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left(\frac{\mu}{r} \right) = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$, où $\frac{\partial}{\partial \vec{r}}$ correspond à l'opérateur $\overrightarrow{\text{Grad}}$ qui est un opérateur de dérivation, et en multipliant l'expression (A.4) par $\frac{d\vec{r}}{dt}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left(\frac{\mu}{r} \right) &= 0 \\ \text{ou encore } \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{r} \right) &= 0 \end{aligned}$$

En notant v la vitesse (ie : $v = \sqrt{\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}}$), on a $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} \right) = 0$. Soit :

$$\boxed{\frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} = h \quad (\text{cste})} \quad \text{intégrale de l'énergie} \quad (\text{A.6})$$

Si h est négatif alors r est borné et le corps ne peut s'éloigner à l'infini. Inversement, si on suppose que le corps peut s'éloigner à l'infini (c'est à dire si $r \rightarrow \infty$, et dans ce cas h doit être positif) alors $\sqrt{2h}$ représente la "vitesse à l'infini".

A.3 Résolution dans le plan de l'orbite

Dans le plan du mouvement, on repère M par ses coordonnées polaires (r, θ) . L'intégrale des aires est :

$$\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r} \wedge \left(\frac{d\vec{r}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \right) = \vec{G}$$

d'où :

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = G \quad (\text{A.7})$$

On a aussi besoin de l'intégrale de l'énergie :

$$h = \frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r}$$

Puisque $\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right\| = 1$, $\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\| = r$ et que $\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \perp \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$, on peut écrire :

$$v^2 = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

éliminons dt par (A.7), c'est à dire $dt = \frac{r^2}{G} d\theta$:

$$v^2 = G^2 \left[\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right]$$

En posant $u = \frac{1}{r}$ (et donc $du = -u^2 dr$), on obtient :

$$v^2 = G^2 \left[u^4 \left(\frac{du}{-u^2 d\theta} \right)^2 + u^2 \right]$$

On en déduit la *première formule de Binet* :

$$v^2 = G^2 \left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right) \quad (\text{A.8})$$

En substituant cette expression dans h , on a :

$$\frac{G^2}{2} \left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right) - \mu u = h$$

On dérive cette expression par rapport à θ :

$$G^2 \left(u \frac{du}{d\theta} + \frac{du}{d\theta} \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) - \mu \frac{du}{d\theta} = 0$$

, ce qui donne la *deuxième formule de Binet* :

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{G^2} \quad (\text{A.9})$$

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre. Les solutions peuvent s'écrire :

$$u = \frac{\mu}{G^2} + \lambda \cos(\theta - \alpha) \quad , \text{ soit encore } r = \frac{1}{\frac{\mu}{G^2} + \lambda \cos(\theta - \alpha)}$$

λ et α étant des constantes réelles arbitraires. En posant $p = G^2/\mu$ et $e = \lambda G^2/\mu$, on a :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \alpha)} \quad (\text{A.10})$$

Remarque : α représentant la direction du péricentre.

A.4 Les mouvements elliptiques, paraboliques et hyperboliques

En coordonnées polaires dans un repère $(O\vec{u}_0\vec{v}_0)$ où $(O\vec{u}_0)$ est la direction du péricentre on a la formule :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos W} \quad \text{avec } p = G^2/\mu \quad (\text{A.11})$$

W est appelée anomalie vraie.

On a bien évidemment :

$$1 - e \leq 1 + e \cos W \leq 1 + e$$

Il faut donc discuter suivant la nature de la conique.

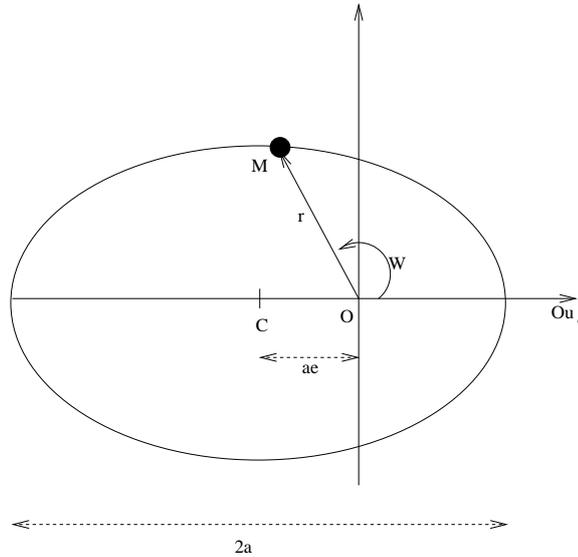


FIGURE A.1 – Ellipse du mouvement képlérien

- Si $e < 1$, la trajectoire est une ellipse (si $e = 0$, c'est un cercle et $(O\vec{u}_0)$ est choisi arbitrairement) et :

$$r_m = \frac{p}{1+e} \leq r \leq r_M = \frac{p}{1-e}$$

Ainsi r_m est atteint pour $W = 0$, et r_M pour $W = \pi$. Si on note $2a$ la distance entre le péricentre et l'apocentre, $2a = r_m + r_M$ (a est appelé le demi-grand axe) et on a

$$\begin{aligned} p &= a(1 - e^2) \\ r_m &= a(1 - e) \\ r_M &= a(1 + e) \end{aligned} \tag{A.12}$$

- Si $e > 1$, la trajectoire est une hyperbole et on a :

$$0 \leq 1 + e \cos W \leq 1 + e$$

et donc :

$$\frac{p}{1+e} \leq r (\leq +\infty)$$

La limite ∞ correspond à $1 + e \cos W = 0$, c'est à dire quand W tend vers l'angle $W_\infty = +\arccos(-1/e)$ ou vers l'angle $-W_\infty$. On utilisera plutôt l'angle δ , appelé angle de déviation puisqu'il correspond à la déviation angulaire d'un corps qui a mouvement (presque) rectiligne et uniforme et qui retourne, après avoir interagit avec un autre corps, sur un autre mouvement (presque) rectiligne et uniforme. δ est lié à W_∞ par $\delta = \pi - 2(\pi - W_\infty)$, soit :

$$\delta = 2W_\infty - \pi \tag{A.13}$$

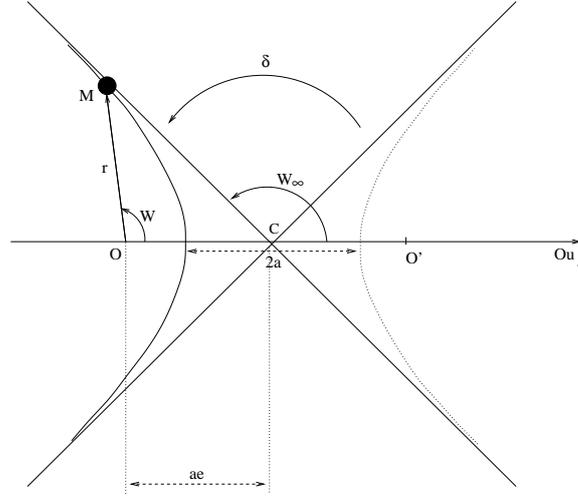


FIGURE A.2 – Hyperbole du mouvement képlérien

La branche de l'hyperbole en pointillés serait la courbe parcourue par M si p était négatif, c'est à dire si $\mu < 0$ (répulsion). On peut encore noter $2a$ la distance entre le péricentre et "l'apocentre" (ici le symétrique du péricentre par rapport à C), d'où

$$2a = -\frac{p}{1-e} - \frac{p}{1+e} = \frac{p(1+e) + p(1-e)}{e^2 - 1}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} p &= a(e^2 - 1) \\ r_m &= a(e - 1) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

- Si $e = 1$, la trajectoire est une parabole on a $\frac{p}{2} \leq r (\leq +\infty)$. On ne peut définir dans ce cas de demi-grand axe. La parabole est un cas limite entre l'ellipse et l'hyperbole. On peut se la représenter mentalement comme une ellipse dont le deuxième foyer (et donc l'apocentre ou même le centre C) est rejeté à l'infini¹.

On a vu que $h = (e^2 - 1)\mu/p$, d'où :

$$\left\| \begin{aligned} h &= -\frac{\mu}{2a} && \text{pour le cas elliptique} \\ h &= 0 && \text{pour le cas parabolique} \\ h &= +\frac{\mu}{2a} && \text{pour le cas hyperbolique} \end{aligned} \right. \quad (\text{A.15})$$

C'est donc le signe de h qui caractérise la nature de la conique et $|h|$ caractérise sa taille. Cette formule (A.15) est importante car avec l'intégrale de l'énergie (A.6),

1. Réciproquement, on peut aussi imaginer une "hyperbole limite" même si c'est plus difficile. Le deuxième foyer est rejeté à l'infini et donc aussi la deuxième branche. W_∞ tend vers π mais le centre C étant rejeté à l'infini, cela "donne" une branche parabolique de direction asymptotique (Ou_0).

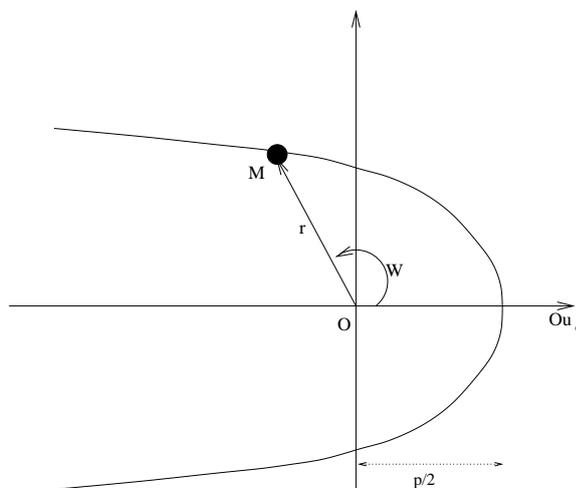


FIGURE A.3 – Parabole du mouvement képlérien

elles permettent de résoudre très facilement quelques petits problèmes comme ceux liés aux calculs de la vitesse de libération, la vitesse circulaire.

On a ainsi vu 5 constantes arbitraires (pour $\vec{G} \neq \vec{0}$) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{G} & (3) \\ h & (1) \\ \text{direction de}(Ou_0) & (1) \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{ll} \text{direction de } \vec{G} & (2 \text{ angles}) \\ a & (1) \\ e & (1) \\ \text{direction de}(Ou_0) & (1) \end{array} \right.$$

La sixième constante arbitraire est issue du mouvement sur la trajectoire que nous allons voir dans la section suivante.

A.5 Mouvement sur la trajectoire (cas elliptique)

La trajectoire est définie par :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos W} \text{ avec } e < 1$$

, et le mouvement sur la trajectoire est donné par la loi des aires :

$$r^2 dW = G dt \text{ où } G^2 = \mu p = a(1 - e^2)\mu$$

En définissant t_p comme étant l'instant de passage au péricentre (ie : en $t = t_p$, $W = 0$), on obtient :

$$\int_0^W r^2 dW = G(t - t_p)$$

soit encore :

$$I = \int_0^W \frac{dW}{(1 + e \cos W)^2} = [a(1 - e^2)]^{-3/2} \sqrt{\mu} (t - t_p)$$

Calculons I . Pour ramener l'expression à celle d'une fraction rationnelle, on doit poser :

$$X = \tan \frac{W}{2} \quad , \quad \text{d'où}$$

$$\frac{dW}{dX} = \frac{2}{1+X^2} \quad \text{et} \quad \cos W = \frac{1-X^2}{1+X^2}$$

On obtient donc² :

$$I = \int_0^X \frac{2(1+X^2)dX}{[(1+X^2) + e(1-X^2)]^2}$$

Pour intégrer une fraction rationnelle, il est souvent judicieux de la décomposer en éléments simples. Celle-ci est déjà un élément "simple" car l'expression dans le crochet $(1-e)X^2 + (1+e)$ est non nul. On pose donc

$$Y^2 = \frac{1-e}{1+e}X^2 \quad \text{afin que le crochet devienne} \quad (1+e)(1+Y^2)$$

Puisque

$$YdY = \frac{1-e}{1+e}XdX \quad \text{et} \quad 1+X^2 = 1 + \frac{1+e}{1-e}Y^2$$

, on a :

$$I = \int_0^Y \frac{2[(1-e) + (1+e)Y^2]}{(1-e)(1+e)^2(1+Y^2)^2} \sqrt{\frac{1-e}{1+e} \frac{1+e}{1-e}} dY$$

$$= \frac{2}{(1-e)^{3/2}(1+e)^{3/2}} \left[\int_0^Y \frac{dY}{1+Y^2} - e \int_0^Y \frac{1-Y^2}{(1+Y^2)^2} dY \right]$$

Il suffit de poser $Y = \tan \frac{E}{2}$ pour avoir simplement :

$$I = \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} \left[\int_0^E dE - e \int_0^E \cos E dE \right]$$

On a ainsi :

$$a^{-3/2} \sqrt{\mu}(t - t_p) = E - e \sin E$$

Il est commode de poser

$$n = a^{-3/2} \sqrt{\mu} \quad \text{et} \quad M = n(t - t_p)$$

M est un angle et n une vitesse angulaire appelée moyen mouvement. En un instant $t + \frac{2\pi}{n}$, M augmente de 2π . Or $M = E - e \sin E$, donc E augmente de 2π . Et puisque $\tan \frac{W}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$, W augmente aussi de 2π . On en déduit que r est périodique de

2. Mathématiquement la notation $\int_0^X f(X)dX$ n'a pas de sens. Il faudrait utiliser une autre notation pour le X de l'une des deux bornes de l'intégrale ce qui alourdirait beaucoup les notations.

W , E et M de période 2π . De plus W , E et M s'annulent en même temps en $t = t_p$. Le mouvement est périodique de période $T = \frac{2\pi}{n}$ et on a la troisième loi de Képler :

$$n^2 a^3 = \mu \text{ ou } \frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2} \quad (\text{A.16})$$

En résumé :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad r &= \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos W} && W \text{ est l'anomalie vraie} \\ \text{(b)} \quad \tan \frac{W}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} && E \text{ est l'anomalie excentrique} \\ \text{(c)} \quad M &= n(t - t_p) && M \text{ est l'anomalie moyenne} \\ \text{(d)} \quad n^2 a^3 &= \mu \\ \text{(e)} \quad M &= E - e \sin E && \text{équation de képler} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

De cette manière si les éléments d'orbite sont donnés³ et si μ est donné alors, à une date t , on calcule :

M par (c), n étant donné par (d)

E en résolvant l'équation de Képler (e)

W par (b)

r par (a)

Au lieu de calculer r et W , on peut vouloir les coordonnées cartésiennes $\begin{matrix} x = r \cos W \\ y = r \sin W \end{matrix}$.

$$\begin{aligned} \cos W &= \frac{1 - X^2}{1 + X^2} = \frac{1 - \frac{1+e}{1-e} Y^2}{1 + \frac{1+e}{1-e} Y^2} = \frac{(1-e) - (1+e)Y^2}{(1-e) + (1+e)Y^2} = \frac{(1-Y^2) - e(1+Y^2)}{(1+Y^2) - e(1-Y^2)} \\ &= \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \\ \sin W &= \frac{2X}{1 + X^2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{Y}{1 + \frac{1+e}{1-e} Y^2} \\ &= \sqrt{1-e^2} \frac{2Y}{(1-e) + (1+e)Y^2} = \sqrt{1-e^2} \frac{2Y}{(1+Y^2) - e(1-Y^2)} \\ &= \sqrt{1-e^2} \frac{\sin E}{1 - e \cos E} \\ 1 + e \cos W &= \frac{(1 - e \cos E) + (e \cos E - e^2)}{1 - e \cos E} \Rightarrow r = a(1 - e \cos E) \end{aligned}$$

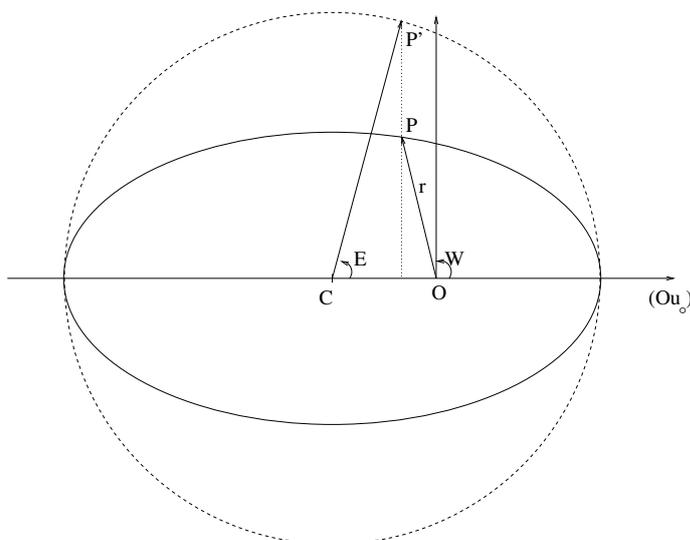


FIGURE A.4 – L'ellipse déduite de son cercle principal

On a ainsi :

$$\begin{aligned}
 r &= a(1 - e \cos E) \\
 x &= r \cos W = a(\cos E - e) \\
 y &= r \sin W = a\sqrt{1 - e^2} \sin E
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

Ces formules permettent d'interpréter géométriquement l'angle E (fig.A.4). Une ellipse est déduite de son cercle principal $C(c, a)$ par une affinité de rapport $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$ perpendiculaire au grand axe. On peut aussi remarquer que, si on limite à l'ordre 1 en e , on obtient $\begin{matrix} x = a(\cos E - e) \\ y = a \sin E \end{matrix}$. Ainsi, pour de petites excentricités, l'ellipse pourra être vue comme un cercle excentré, c'est à dire dont le centre est à la distance ae de O .

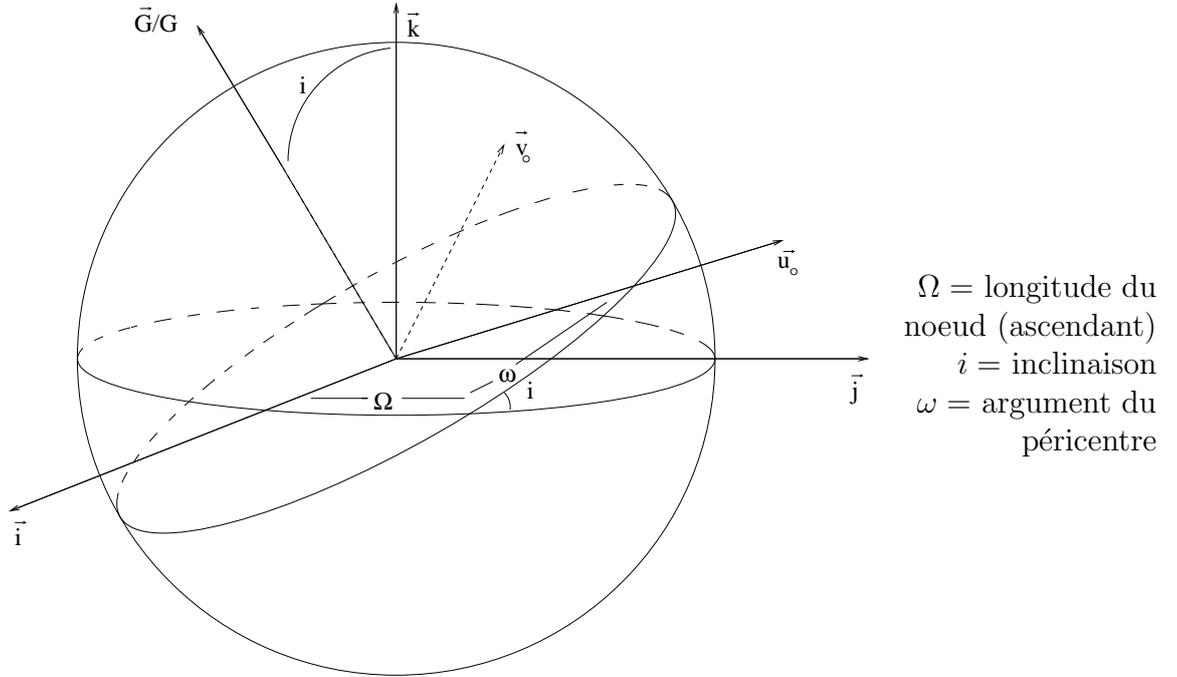
A.6 Éléments d'orbites

L'intégration du problème képlérien a fait apparaître 6 constantes arbitraires en plus du paramètre μ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{G}/G & (2) \\ \text{direction de } (Ou_0) & (1) \\ h \text{ ou } a & (1) \\ e & (1) \\ t_p & (1) \end{array} \right.$$

3. soit la position du plan de l'orbite, la direction du périastre, l'excentricité, le demi-grand axe et t_p .

On a vu que $R_0 = (O\vec{u}_0, \vec{v}_0, \frac{\vec{G}}{G})$ est le repère propre de la trajectoire. Il faut repérer R_0 par rapport à un repère extérieur indépendant $R = (Oijk)$. Cela peut se faire par les classiques angles d'Euler⁴ : Ω, i, ω



Ces trois angles dépendent évidemment du choix de R . Il se peut que $i = 0^\circ$, dans ce cas Ω n'est pas défini ainsi que ω . Plus généralement, si i est petit, Ω et ω sont mal déterminés. Pour éviter ce problème on utilise plutôt

$$\varpi = \Omega + \omega \text{ longitude du péricentre} \quad (\text{A.19})$$

De la même manière si e est petit W , E et M sont mal déterminés. C'est pourquoi on utilise :

$$\begin{aligned} l &= \varpi + W && \text{longitude vraie} \\ F &= \varpi + E && \text{longitude excentrique} \\ \lambda &= \varpi + M && \text{longitude moyenne} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

A la place de t_p , lui aussi mal défini si e est petit, on utilise $\lambda_0 = \lambda(t_0)$, où t_0 est une

4. Les angles d'Euler sont issues de la succession de rotations dans "l'ordre 313", c'est à dire une rotation de Ω autour du troisième axe, puis une rotation de i autour du (nouveau) second axe et une rotation de ω autour du (nouveau) troisième axe. On aurait pu imaginer d'autres successions mais celle définissant les angles d'Euler est la plus utilisée.

TABLE A.1 – Éléments moyens des orbites héliocentriques des principales planètes du système solaire, rapportés à l'écliptique et à l'équinoxe moyens J2000 et pour la date $t_0 = J2000$.

| | a ua | e | i ° | Ω ° | ϖ ° | λ_0 ° | n "/jour |
|---------|----------|--------|--------|---------------|---------------|------------------|-------------|
| Mercure | 0,38710 | 0,2056 | 7,00 | 48,33 | 77,46 | 252,25 | 14732,42 |
| Vénus | 0,72333 | 0,0068 | 3,39 | 76,68 | 131,56 | 181,98 | 5767,67 |
| Terre | 1,00000 | 0,0167 | 0,00 | - | 102,94 | 100,47 | 3548,19 |
| Mars | 1,52368 | 0,0934 | 1,85 | 49,56 | 336,06 | 355,43 | 1886,52 |
| Jupiter | 5,20260 | 0,0485 | 1,30 | 100,46 | 14,33 | 34,35 | 299,128 |
| Saturne | 9,55491 | 0,0555 | 2,49 | 113,66 | 93,06 | 50,08 | 120,455 |
| Uranus | 19,21845 | 0,0463 | 0,77 | 74,01 | 173,00 | 314,05 | 42,231 |
| Neptune | 30,11039 | 0,0090 | 1,77 | 131,78 | 48,12 | 304,39 | 21,534 |
| Pluton | 39,44 | 0,2485 | 17,13 | 110,7 | 224,6 | 237,7 | 14,3 |

date origine choisie arbitrairement (par exemple : $t_0 = J2000$ c'est à dire le 1 janvier 2000 à 12h).

Ainsi on considère souvent les éléments d'orbite suivant :

$$(a, e, i, \Omega, \varpi, \lambda_0)$$

ou encore

$$(a, z, \zeta, \lambda_0)$$

où

$$z = e \exp \sqrt{-1} \varpi \quad \text{et} \quad \zeta = \sin \frac{i}{2} \exp \sqrt{-1} \Omega$$

Ces variables complexes ont l'avantage d'être régulières. En effet si e est nul, ϖ n'est pas définie mais les deux coordonnées cartésiennes le sont puisque $z = 0$ (de même avec ζ).

Le tableau (A.1) donne les éléments moyens des orbites héliocentriques des principales planètes du système solaire, rapportés à l'écliptique et à l'équinoxe moyens J2000 (voir Chap. 3) et pour la date $t_0 = J2000$.

De plus, le tableau (A.2) donne les masses des principales planètes du système solaire et le tableau (A.3) celles de quelques uns des satellites de ces planètes.

A.7 La navigation spatiale

La technique du tremplin gravitationnel qui est très utilisée en navigation spatiale, consiste à utiliser la masse d'un gros corps (par exemple Jupiter) pour dévier une trajectoire.

Une sonde voyage dans le système solaire suffisamment loin des autres planètes et notamment de Jupiter. Ainsi on suppose que son mouvement est képlérien avec

$$\mu_{\odot} = KM_{\odot} \text{ d'origine } \odot$$

TABLE A.2 – Inverse de la masse des principales planètes du système solaire. L'unité de masse est la masse du Soleil.

| | | | |
|--------------|-----------|---------|---------------|
| Mercure | 6 023 600 | Saturne | 3498,5 |
| Vénus | 408 523,5 | Uranus | 22 869 |
| Terre + Lune | 328 900,5 | Neptune | 19 314 |
| Mars | 3 098 710 | Pluton | 130 000 000 * |
| Jupiter | 1047,355 | Cérès | 1 700 000 000 |

* Avant la découverte de son satellite Charon en 1978 qui a permis d'évaluer correctement la masse de Pluton grâce à la troisième loi de Képler, cette masse était surestimée à 1 / 3 000 000.

TABLE A.3 – Inverse de la masse des principaux satellites de planètes. L'unité de masse est la masse de la planète correspondante.

| planète | satellite | $\frac{m_{\text{planète}}}{m_{\text{satellite}}}$ | planète | satellite | $\frac{m_{\text{planète}}}{m_{\text{satellite}}}$ |
|---------|-----------|---|---------|-----------|---|
| Terre | Lune | 81,301 | Mars | Phobos | 50 500 000 |
| | | | | Deimos | 360 000 000 |
| Jupiter | Io | 21 276,6 | | | |
| | Europe | 39 062,5 | Saturne | Mimas | 15 800 000 |
| | Ganymède | 12 755,1 | | Encelade | 11 000 000 |
| | Callisto | 17 857,1 | | Téthys | 943 400 |
| | | | | Dioné | 509 400 |
| Uranus | Miranda | 1 300 000 | | Rhéea | 231 000 |
| | Ariel | 64 000 | | Titan | 4225,86 |
| | Umbriel | 74 000 | | Hypérion | 30 000 000 |
| | Titania | 24 600 | | Japet | 320 000 |
| | Obéron | 28 800 | | | |
| | | | Neptune | Triton | 4780 |
| Pluton | Charon | 8,0 | | Néréide | 5 000 000 |

Ensuite, cette trajectoire amène la sonde dans le voisinage de Jupiter. On peut définir une “sphère d’influence” à Jupiter, à l’intérieur de laquelle l’influence du Soleil est (considérée) négligeable par rapport à celle de Jupiter (et inversement à l’extérieur de cette sphère). Dans la description qui suit, il n’est pas nécessaire de définir plus précisément cette sphère⁵ car on suppose que la sonde passe très rapidement près de Jupiter de manière à ce que l’on puisse négliger le temps d’interaction avec Jupiter (quelques heures) par rapport au temps de parcours de l’orbite héliocentrique (quelques années). On a donc à l’intérieur de la sphère d’influence un mouvement képlérien hyperbolique avec

$$\mu_J = KM_J \text{ d'origine } J$$

Le mouvement est nécessairement hyperbolique puisque, vue de Jupiter, la sonde “arrive de l’infini” avec une vitesse (à l’infini) non nul (voir A.6).

A la sortie de la sphère d’influence, la vitesse jovicentrique a simplement changé de direction et donc la vitesse héliocentrique a changé (en direction et en module).

La formule (A.13) nous donne la déviation de la vitesse jovicentrique (figure A.5) :

$$\sin \frac{\delta}{2} = \sin\left(\frac{-\pi + 2W_\infty}{2}\right) = -\cos W_\infty = 1/e$$

Or $h = +\frac{\mu}{2a} = \frac{V_\infty^2}{2}$ et $r_m = a(e - 1)$. On en déduit :

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{1}{1 + \frac{r_m V_\infty^2}{\mu}} \quad (\text{A.21})$$

Puisque $b = a\sqrt{e^2 - 1}$, on peut aussi écrire :

$$\sin^2 \frac{\delta}{2} = \frac{1}{1 + \frac{b^2 V_\infty^4}{\mu^2}} \quad (\text{A.22})$$

La figure (A.5) aide à comprendre l’approximation qui est faite ici. Celle-ci consiste à supposer que le mouvement héliocentrique de la sonde juste avant l’interaction avec Jupiter est rectiligne et uniforme (avec la vitesse \vec{V}_∞^e) ce qui permet de l’assimiler à la première asymptote (de même après l’interaction avec la deuxième asymptote). Cette supposition signifie que le temps d’interaction est très court. C’est en ce sens que le tremplin gravitationnel peut être assimilable à un choc : “instantanément” le vecteur vitesse de la trajectoire est changé. C’est pour cela que l’on parle aussi de “billard” gravitationnel, la loi du changement de vitesse étant donnée ici par (A.21) ou (A.22).

5. Si on le faisait notre description resterait quand même une approximation.

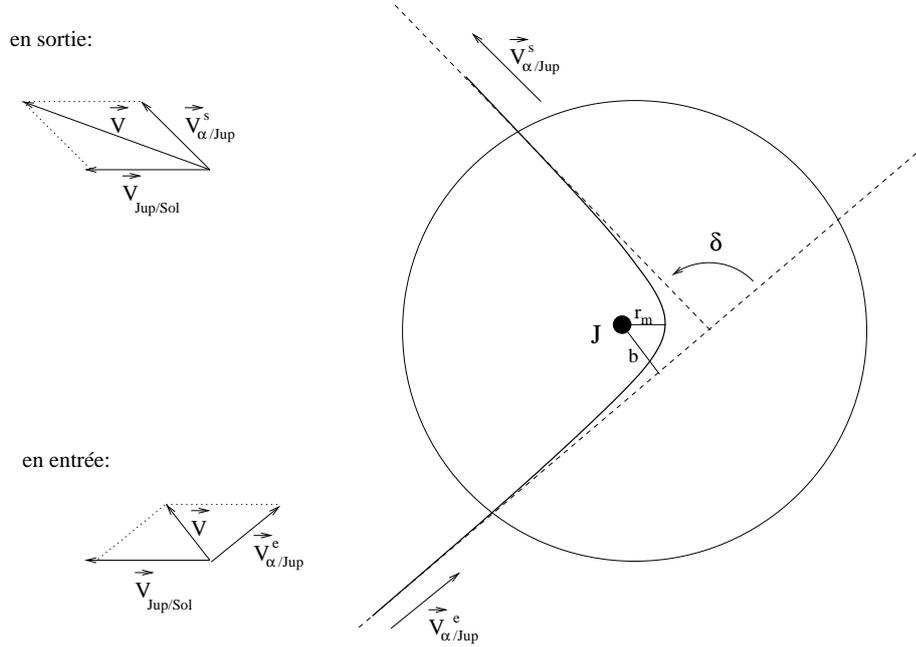


FIGURE A.5 – Principe du tremplin gravitationnel

A.8 Longitude du Soleil à partir de l'équation de Kepler

Le mouvement du Soleil dans le plan de l'écliptique suit la loi des aires. Celle-ci est donnée par les formules vues au chapitre A que nous rappelons ici :

$$\begin{aligned}
 M &= E - e \sin E & M &= \frac{2\pi}{T}(\theta - \theta_0) \\
 \tan \frac{W}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} & \theta_0 &\approx 4 \text{ janvier} \\
 l &= \varpi + W & \varpi &= 282^\circ 56'
 \end{aligned}$$

θ_0 représente l'instant de passage au péricentre et ϖ la longitude du péricentre. Ainsi l est bien la longitude du Soleil comptée sur l'écliptique à partir du point γ .

Calculons W en fonction de M à l'ordre 1 par rapport à e :

$$W = M + (W - E) + (E - M)$$

Or

$$E - M = e \sin E \simeq e \sin M$$

Par ailleurs, $W - E$ se calcule par $\tan \frac{W}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$ qui est une formule de la

forme $\tan u = (1 + \varepsilon) \tan v$, car

$$\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \simeq \sqrt{(1+e)(1+e)} = 1+e$$

Développons $\tan u$ au voisinage de v :

$$\tan u \simeq \tan v + \frac{1}{\cos^2 v}(u - v)$$

, ainsi

$$\tan u - \tan v = \varepsilon \tan v \simeq \frac{u - v}{\cos^2 v} \quad \text{c'est à dire} \quad u - v \simeq \varepsilon \sin v \cos v$$

On en tire le petit lemme suivant :

L'expression $\tan u = (1 + \varepsilon) \tan v$ s'exprime approximativement (à l'ordre 1 en ε) par $u - v = \frac{\varepsilon}{2} \sin 2v$.

On en déduit ici :

$$\frac{W}{2} - \frac{E}{2} \simeq \frac{e}{2} \sin 2\frac{E}{2} \quad \text{c.a.d.} \quad W - E \simeq e \sin E \simeq e \sin M$$

, d'où finalement :

$$\begin{aligned} W &= M + (W - E) + (E - M) \\ &= M + 2e \sin M \end{aligned}$$

La longitude du Soleil s'écrit ainsi :

$$\underline{l = \varpi + M + 2e \sin M} \tag{A.23}$$

avec

$$\varpi = 282^\circ 56', \quad e = 0,0167, \quad M = \frac{2\pi}{T}(\theta - \theta_0) \text{ et } \theta_0 \approx 4 \text{ janvier}$$