

Université des Sciences et Techniques de Lille

Éléments d'Astronomie Fondamentale

Alain Vienne

LAL-IMCCE Laboratoire d'Astronomie de Lille
de l'Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Ephémérides
Lille 1 et Observatoire de Paris, UMR 8028 du CNRS.

janvier 2008

Eléments d'Astronomie Fondamentale

Alain Vienne

23 janvier 2008

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Méthodes et histoire rapide de l’Astronomie | 5 |
| 1.1 | Méthodes générales de l’Astronomie | 5 |
| 1.2 | Les distances dans le système solaire et dans l’Univers | 6 |
| 1.2.1 | unités et échelles de distances | 6 |
| 1.2.2 | mesures de distances dans le système solaire | 7 |
| 1.2.3 | mesure de la distance des étoiles | 8 |
| 1.3 | Histoire rapide de l’Astronomie | 10 |
| 1.3.1 | période antique (-3000,-1000) | 10 |
| 1.3.2 | période géocentrique (-1000,1500) | 10 |
| 1.3.3 | période héliocentrique (1500,1780) | 12 |
| 1.3.4 | la Galaxie (1780,1920) | 14 |
| 1.3.5 | les autres galaxies (après 1920) | 15 |
| 1.3.6 | conclusion | 16 |
| 2 | Coordonnées sur la sphère céleste | 17 |
| 2.1 | Trigonométrie sphérique | 17 |
| 2.2 | Système de coordonnées sur la sphère | 20 |
| 2.3 | Coordonnées locales | 21 |
| 2.4 | Mouvement diurne et coordonnées horaires | 22 |
| 2.5 | Changement de coordonnées | 24 |
| 2.6 | Coordonnées équatoriales et temps sidéral local | 25 |
| 3 | Le problème des deux corps | 27 |
| 3.1 | Formulation | 27 |
| 3.2 | Invariance du moment cinétique et de l’énergie | 29 |
| 3.3 | Résolution dans le plan de l’orbite | 30 |
| 3.4 | Les mouvements elliptiques, paraboliques et hyperboliques | 31 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.5 | Mouvement sur la trajectoire (cas elliptique) | 35 |
| 3.6 | Eléments d'orbites | 38 |
| 3.7 | La navigation spatiale | 40 |
| 4 | Le mouvement du Soleil | 45 |
| 4.1 | Coordonnées écliptiques | 45 |
| 4.2 | Première approximation : | 46 |
| 4.3 | Equation du temps : | 47 |
| 4.3.1 | partie due à l'excentricité | 48 |
| 4.3.2 | partie due à l'obliquité | 50 |
| 4.3.3 | Equation du temps | 50 |
| 4.4 | Précession | 53 |
| 5 | La Terre | 57 |
| 5.1 | Représentation astronomique de la Terre | 57 |
| 5.2 | Coordonnées astronomiques d'un lieu. | 60 |
| 5.3 | Relation entre longitude et temps sidéral local | 61 |
| 5.4 | Mesure précise des coordonnées d'un lieu | 62 |
| 5.5 | Le point en mer : droites de hauteur | 63 |
| 5.6 | Un illustration littéraire | 68 |
| 5.7 | Figure de la Terre : le Géoïde | 70 |
| 5.8 | Premiers éléments de géodésie | 71 |
| 5.8.1 | Courbure du géoïde | 71 |
| 5.8.2 | Triangulation | 73 |
| 5.8.3 | Coordonnées géodésiques | 75 |

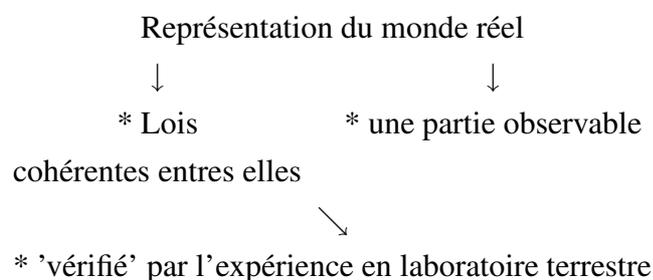
Chapitre 1

Méthodes et histoire rapide de l'Astronomie

1.1 Méthodes générales de l'Astronomie

L'astronomie est une science très ancienne. Son objet, le ciel, est à la fois très proche et très distant : très proche car il suffit de lever la tête pour l'observer, et très distant car il n'est pas "palpable". Cette particularité en a fait longtemps une science à part. Il n'est pas possible de faire des expériences sur les objets du ciel comme cela peut se faire avec les objets terrestres. De plus, les très grandes distances à considérer ou, du moins (avant que ces distances ne soient connues), l'inaccessibilité des objets à étudier, ont pu donner à l'astronomie un caractère mystérieux quelquefois magique. Cela peut expliquer ses branches non scientifiques qui lui sont quelques fois associées : astrologie, divinations, ...

L'astronomie, en tant que science, se veut une représentation du monde réel :



Si ces trois points sont acquis, on peut dire que le modèle est scientifiquement valable. Il permet donc d'expliquer, de faire des prédictions et des extrapolations. Une autre

conséquence du schéma présenté est qu'il n'y a pas de vérité scientifique au sens de vérité absolue.

Un modèle dépend :

- des observations ; celles-ci dépendent elles-mêmes des technologies utilisées ; actuellement la quantité d'observations est très grande au point que le problème de gérer cette masse de données est fait dans des centres ou des équipes spécialisés : Centre de Données Stellaires (Strasbourg), Hipparcos, Natural Satellites Data Base (Paris), ...
- du niveau des connaissances théoriques ; il repose sur les mathématiques et les sciences physiques.

Exercice : Exemple de la démarche scientifique chez les anciens (Eratostène et Aristarque) :

1.2 Les distances dans le système solaire et dans l'Univers

Les distances considérées en astronomie sont grandes. Mais surtout, ce qui est considéré comme grand à une certaine échelle, pourra être considéré comme petit si on change d'échelle. Les approximations faites ou la compréhension des phénomènes en sont grandement affectées. D'ailleurs, l'histoire de l'astronomie doit être vue en tenant compte de cette caractéristique. Une autre conséquence est qu'une seule unité de longueur ne suffit pas à appréhender toutes les distances.

1.2.1 unités et échelles de distances

Le tableau 1.1 est extrait de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes 2002*. On voit déjà que, même en se limitant au système solaire, deux unités de longueur sont utilisées : le rayon équatorial terrestre (6378.14 km) et l'unité astronomique (1ua=149 587 870 km). Au delà du système solaire, on utilise l'année lumière (al) qui est la distance parcourue dans le vide par la lumière en une année. On utilise aussi le parsec (pc, sect. 1.2.3). On a : $1 \text{ al} = 6.32 \cdot 10^4 \text{ ua} = 0.307 \text{ pc}$, et $1 \text{ pc} = 206\,265 \text{ ua} = 3.26 \text{ al}$. La plus proche étoile du soleil, α du Centaure, est à 4.3 al (1.31 pc) du Soleil. Le diamètre de notre galaxie est estimé à environ 100 000 al.

Avec ces données, on peut se faire une idée de la taille de la Terre dans le système solaire et de la taille de celui-ci dans la galaxie. C'est ce que synthétise le tableau 1.2.

TAB. 1.1 – Quelques données relatives aux astres principaux du système solaire.

| Nom | Demi-grand axe (ua) | Diamètre équatorial (Terre=1) |
|---------|------------------------|----------------------------------|
| Mercure | 0.3871 | 0.38 |
| Vénus | 0.7233 | 0.95 |
| Terre | 1.0000 | 1 |
| Mars | 1.5237 | 0.53 |
| Jupiter | 5.2026 | 11.21 |
| Saturne | 9.5547 | 9.45 |
| Uranus | 19.2181 | 4.01 |
| Neptune | 30.1096 | 3.88 |
| Pluton | 39.4387 | 0.19 |
| Lune | | 0.27 |
| Soleil | | 109 |

TAB. 1.2 – Quelques rapports de distances.

| | km | RT | ua | al | |
|------------------------|-------------|-----|---------|---------|-------------------|
| rayon de la Terre | 6378 | 1 | | | 0.1 mm |
| rayon du Soleil | | 109 | | | 1.2 cm |
| Terre-Soleil | 149 597 870 | | 1 | | 2.6 m |
| Soleil-Pluton | | | 39 | | 100 m |
| α Centaure | | | 272 000 | 4.3 | 700 km |
| diamètre de la galaxie | | | | 100 000 | 16 millions de km |

On pourrait compléter chacune des colonnes mais on se rendrait compte que les nombres obtenus ne sont pas “parlants” : une seule unité de longueur ne suffit pas à appréhender toutes les distances. On peut tenter d’y parvenir en faisant une homothétie de chacune des distances. La dernière colonne du tableau 1.2 donne les résultats obtenus en ramenant le rayon du Soleil à celui d’une pièce d’un euro. On ramène ainsi les distances (à l’exception de la dernière) à des valeurs “humaines” dans le sens où on peut considérer que notre cerveau sait appréhender des distances comprises entre 0.1 mm et 700 km.

1.2.2 mesures de distances dans le système solaire

Toutes les mesures de distances faites dans le système solaire sont fondées sur la connaissance des dimensions de la Terre. Ces dernières sont issues de mesures de tri-

angulation et surtout, à l'heure actuelle, de satellites géodésiques (au millimètre près).

La distance Terre-Lune est mesurée par laser à l'aide des 4 réflecteurs laser déposés sur la Lune par les missions Apollo dans les années 70. La précision atteint quelques centimètres.

Les distances de la Terre aux planètes sont données grâce à la Mécanique céleste (grossièrement : les lois de Képler). Les faisceaux radar envoyés sur les planètes permettent aussi de connaître leurs distances. Enfin, les sondes spatiales envoyées pour explorer le système solaire ont été suivies par radio jusqu'à plusieurs dizaines d'unités astronomiques.

1.2.3 mesure de la distance des étoiles

la parallaxe

On observe à 6 mois d'intervalle une même étoile suffisamment proche. On voit alors cette étoile dans deux directions légèrement différentes. La mesure de ces directions permet de déterminer l'*angle de parallaxe* de l'étoile qui est défini comme *l'angle sous lequel, depuis cette étoile, on verrait le rayon de l'orbite terrestre*. L'étoile la plus proche (α du Centaure) a un angle de parallaxe égal à $0''76$.

La parallaxe est à l'origine d'une nouvelle unité de distance –le parsec (ou pc)– qui représente la distance pour laquelle on voit le rayon de l'orbite terrestre (1 ua) sous un angle de $1''$. On a donc :

$$1 \text{ parsec} = 206\,264,8 \dots \text{ ua}$$

. Par exemple, la distance de α du Centaure vaut $1 / 0,76 = 1,31$ pc. Avec le satellite Hipparcos la précision atteinte sur les mesures de parallaxe est de l'ordre de $0''002$ ce qui correspond à 500 pc.

Pour des distances plus grandes, on utilise des méthodes indirectes.

la luminosité

La *magnitude apparente* m d'une étoile est définie par : $m = -2,5 \log_{10}(I/d^2)$ où I est l'intensité lumineuse de l'étoile et d sa distance à la Terre. Avec cette échelle logarithmique, on garde la classifications des anciens entre les étoiles de "première grandeur", de "deuxième grandeur", etc ... Ainsi $m = 0$ pour l'étoile la plus brillante de la constellation de la Lyre (Véga) qui a été prise pour référence et $m = 5$ est la limite des étoiles visibles à l'œil nu. Avec les grands télescopes actuels, on peut atteindre une magnitude de l'ordre $+30$. A l'inverse, le Soleil a une magnitude apparente de -27 .

La *magnitude absolue* est définie comme la magnitude apparente qu'aurait une étoile si on l'observait à une distance d_0 fixée arbitrairement à 10 pc, :

$$M = -2,5 \log_{10}(I/d_0^2)$$

. On a ainsi :

$$M = m - 5 \log_{10} d + 5 \quad \text{où } d \text{ est en pc}$$

. Pour le Soleil, M vaut 4,8.

Pour les étoiles proches, celles pour lesquelles on a pu mesurer leur distance par leur parallaxe, on peut calculer M (puisque que l'on mesure assez facilement m). Cela a permis de faire des études astrophysiques qui ont montré, entre autres, que M est fonction de la température de l'étoile. Cette température peut être déterminée par analyse spectroscopique de la lumière reçue de l'étoile. Cette loi, que l'on visualise sur une figure appelée diagramme H-R (pour Hertzsprung et Russell qui l'ont trouvée en 1910), peut bien sûr s'extrapoler aux étoiles dont on ne connaît pas la distance (au delà de 500 pc). Avec la relation précédente entre m et M , on détermine la distance d de l'étoile. D'autres lois¹ permettent aussi de déterminer M et donc d . Ce sont toutes des méthodes indirectes de détermination de distances car elles sont basées au départ sur les mesures de parallaxe. Ces lois peuvent être des lois physiques ou des lois empiriques.

Citons encore un exemple : les Céphéides sont des étoiles dont la luminosité varie intrinsèquement avec une période qui va de 0,3 à 100 jours ; Leavitt en 1912 a trouvé la relation suivante entre la période P et la magnitude absolue M des Céphéides :

$$M = a \log P + b$$

où a et b sont des constantes. Ces étoiles étant intrinsèquement très lumineuses, elles sont visibles jusqu'à près de 20 Mégaparsec donc au delà même de notre galaxie. Ainsi, Leavitt estima la distance des Nuages de Magellan qui sont des galaxies satellites à la Voie Lactée (notre galaxie) à environ 100 000 pc.

Enfin, pour les galaxies plus lointaines, il y a la loi de Hubble :

$$V_r = H D$$

qui relie la vitesse radiale d'éloignement des galaxies à leur distance. La vitesse radiale est

¹relation masse-luminosité, parallaxe dynamique, novae, supernovae et rotation des galaxies spirales

mesurée par l'effet Doppler-Fizeau de la lumière c'est à dire son décalage vers le rouge. Cette loi était empirique au moment de sa découverte par Hubble. Actuellement, on l'explique par une expansion de l'Univers lui-même modélisée par la théorie du "Big-Bang" qui s'appuie sur la relativité générale. Cette loi permet d'estimer les distances jusqu'aux "confins" de l'Univers. Malheureusement la valeur de H , appelée constante de Hubble, est mal connue (entre 50 et 100 km/s par Mpc). De plus, l'interprétation de la loi de Hubble pour de très grandes distances n'est pas claire : outre une précision de seulement 50% pour chaque distance ainsi déterminée, la valeur elle-même de la distance n'a pas une grande fiabilité.

1.3 Histoire rapide de l'Astronomie

1.3.1 période antique (-3000,-1000)

Avec l'aide de pyramides, temples ou autres alignements, on observe les positions apparentes de quelques astres seulement : Soleil, la Lune et quelques étoiles brillantes. Le temps est lié au mouvement de rotation de la Terre : le jour est divisé en 12h et la nuit est elle aussi divisée en 12h. Le mouvement de la Terre autour du Soleil est observé par l'apparition des constellations durant la nuit (figure 1.1).

1.3.2 période géocentrique (-1000,1500)

Durant cette période, l'astronomie s'est développée principalement autour de la Méditerranée : Grèce ancienne, Afrique du nord et le monde arabe.

Thalès (-600) pense que la Terre est plate et qu'elle flotte sur l'eau sous la sphère céleste.

Pour Pythagore (-530) et Aristote (-355), la Terre est sphérique et tourne autour d'un feu. La Terre est entourée de 10 sphères concentriques en cristal (pureté ?). Ces sphères portent les planètes et les étoiles. Le ciel étant supposé en harmonie, une analogie est faite entre la répartition de ces sphères et la musique ("harmonie des sphères").

Vers la même époque, Eratostène (-250) et Aristarque de Samos (-280) font les premières estimations de distances. Le premier détermine le rayon terrestre, le deuxième les distances Terre-Lune et Terre-Soleil grâce, d'une part, à l'observation des phases et des éclipses de la Lune et, d'autre part, à un modèle héliocentrique du système solaire (voir exercice en 1.1).

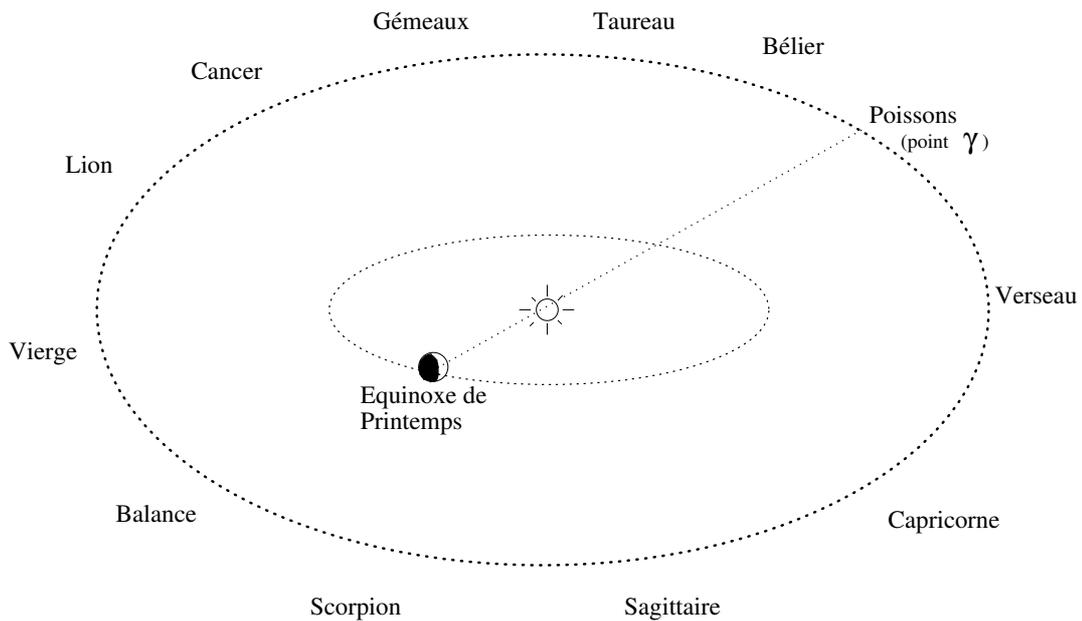


FIG. 1.1 – Mouvement de la Terre autour du Soleil et mouvement apparent du Soleil à travers les constellations.

Hipparque (-150) a classé 800 étoiles en 6 "grandeurs" (appelées ensuite magnitudes apparentes). C'est le premier "catalogue d'étoiles". Il a découvert la précession des équinoxes, c'est à dire le fait que la position du Soleil à l'équinoxe de printemps (point γ , voir fig. 1.1) dérive lentement de 50'' par an dans le ciel dans le sens rétrograde (voir sect. 4.4). Ainsi, le point γ était plus dans la constellation du Bélier en -1000 ; il est actuellement dans la constellation du Poisson.

Ptolémée (+150) rassemble les connaissances de l'époque dans l'*Almageste* et décrit les mouvements (géocentriques) des planètes. Cette description sera utilisée pendant 1300 ans.

Exercice : mouvement plan et circulaire de la Terre et d'une planète autour du Soleil : visions géocentrique et héliocentrique.

Al-Battâni (900) mesure précisément la durée de l'année ainsi que l'excentricité de l'orbite du Soleil autour de la Terre.

Ensuite l'Europe entre dans l'"âge noir" de l'astronomie. Il n'y a que dans le monde arabe que l'astronomie fleurit encore.² L'*Almageste* est traduit en arabe vers 820. Les mesures des phénomènes astronomiques sont plus précises et collectées en quantité plus

²Nous n'avons pas considéré ici d'autres civilisations comme la civilisation chinoise, plus lointaines de la nôtre.

importantes. Ces observations seront très utiles ensuite en Europe. D'ailleurs, de nombreux termes astronomiques provenant de l'arabe sont toujours en usage. Outre le mot "Almageste" déjà vu, il y a aussi "zénith", "nadir", "almanac", "Algol", "Aldébaran", "Altaïr", "Bételgeuse", ... et enfin "Algèbre". Les arabes introduisent en effet le système décimal (1,2,3,...), le signe "0" pour zéro et la trigonométrie sphérique (voir Chap. 2). Malheureusement, ils n'ont pas, en astronomie, développé de nouveaux modèles, se contentant d'utiliser ceux issus de la Grèce ancienne.

1.3.3 période héliocentrique (1500,1780)

Copernic (1543) propose un modèle héliocentrique pour décrire le mouvement du Soleil et des planètes (voir ex. 1.3.2).

Des progrès en mathématiques sont réalisés : algèbre, table de sinus de $10''$ en $10''$ et le logarithme (Neper, 1614).

Tycho Brahé (1575) observe, à l'oeil nu, les planètes et notamment Mars. Il mesure la parallaxe des comètes montrant ainsi que ce sont des phénomènes célestes. Ces observations atteignent la précision de $1'$. Logiquement, il garde une vision géocentrique du système solaire car sinon, dit-il, il devrait observer le phénomène de la parallaxe annuelle (sect. 1.2.3).

Képler (1600) qui était l'élève de Tycho Brahé, grâce aux observations de celui-ci, publie ses trois lois (voir Chap. 3). La première dit que la Terre et les planètes décrivent chacune une ellipse dont le Soleil est l'un des deux foyers. La deuxième, appelée aussi "loi des aires", dit que la surface balayée par le rayon vecteur est proportionnelle au temps (ou de manière équivalente, que la vitesse aréolaire est constante). La troisième relie le demi-grand axe a de l'orbite de la planète avec sa période T de révolution : $a^3/T^2 = \text{Cste}$. Ces lois sont purement descriptives. Cela signifie qu'elles sont empiriques, Képler les ayant déduites des observations seules. Elles ont été démontrées plus tard par Newton dans le cadre de sa théorie de la gravitation universelle et avec le principe d'inertie de Galilée.

Exercice : En supposant les mouvements de la Terre, S , et de Mars, M , coplanaires, circulaires, uniformes et centrés sur le Soleil, S , chercher une relation entre le rapport des rayons et l'angle S et M vu de T (angle $\theta = \widehat{STM}$) lorsque la longitude (géocentrique) est stationnaire (points St).

Galilée (1620) jette les bases de la mécanique en énonçant le principe d'inertie : un corps ne se met pas spontanément en mouvement, ou encore, dans un système isolé le mouve-

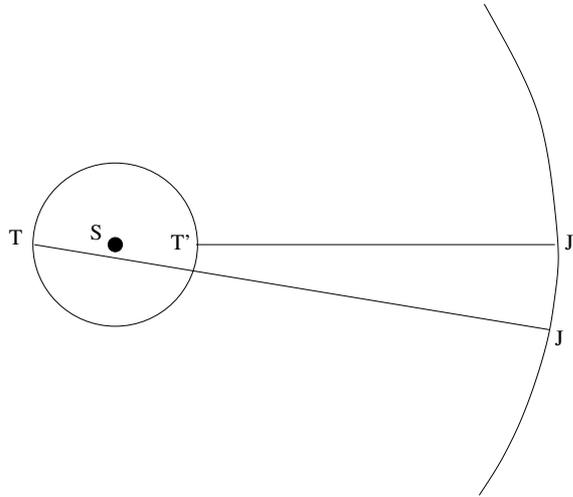


FIG. 1.2 – Mesure de la vitesse de la lumière

ment d'une particule est rectiligne et uniforme. Il manque, pour vraiment développer cette discipline, la définition des forces qui est sous-entendue par ce principe et notamment celle de la gravitation universelle. C'est Galilée qui a eu l'idée de pointer la lunette vers le ciel mettant ainsi en évidence le relief lunaire et les taches solaires. Ces deux observations mettent à mal l'idée, qui a dominé longtemps, d'un ciel qui serait le domaine de la perfection. C'est donc un pas vers l'idée que les lois physiques doivent être universelles. De plus, sa lunette lui a permis de découvrir quatre petits corps qui tournent autour de Jupiter. Ces corps sont appelés depuis les quatre satellites galiléens de Jupiter. Cette découverte renforce la vision de Copernic en montrant qu'il existe des corps qui ne tournent pas autour de la Terre.

En 1667, l'Observatoire de Paris est fondé. C'est le plus ancien observatoire encore en activité. C'est là que Cassini et Picard détermineront précisément le rayon de la Terre. Römer y détermine la vitesse c de la lumière en observant les occultations des satellites galiléens par Jupiter : si la lumière était instantanée (ie : si c était ∞), les occultations de Io par Jupiter s'observeraient depuis la Terre à intervalles de temps réguliers. Or Römer observe un décalage qui dépend de la position de la Terre par rapport au Soleil (et donc par rapport à Jupiter). Entre les deux positions extrêmes de la figure 1.2, ce décalage est de 998 s. Or $998 \sim \frac{TT'}{c}$, donc $c = \frac{2}{998}$ ua/s, soit environ 300 000 km/s.

L'Observatoire de Greenwich a été fondé en 1676 par Flamsted dans le but de déterminer les longitudes terrestres à usages dans la marine. C'est là que, en 1682, Halley calcule, à l'aide des lois de Képler, les éléments de l'orbite de la comète qui porte son nom. Il

prédira ainsi son retour en 1759.

Newton (1687) apporte une pierre fondamentale à l'astronomie et plus généralement à la science en posant les principes d'inertie et d'action-réaction, en introduisant la notion d'accélération et donc de force. Il découvre avec Leibnitz le calcul infinitésimal. Ainsi, avec ces principes, ces outils mathématiques et bien sûr sa fameuse loi de la gravitation universelle, il démontre les lois de Képler. Il va même plus loin, puisqu'il calcule quelques perturbations à ce mouvement képlérien notamment dans les mouvements de la Lune et de Jupiter. En effet, le mouvement de la Lune et des planètes n'est pas exactement régi par le problème des deux corps dont sont issues les lois de Képler, mais aussi par toutes les interactions mutuelles entre tous les corps composant le système. Il faut encore noter que Newton a décomposé la lumière blanche en un spectre de couleurs. Il a aussi construit le premier télescope.

Maupertuis (1736) avec Bouguer et La Condamine (1740) ont organisé ou participé à des expéditions qui ont permis de calculer l'aplatissement de la Terre aux pôles.

Laplace (1796) publie son fameux traité de Mécanique Céleste. Il discute de la stabilité du système solaire : en limitant les calculs à l'ordre 2 des masses des planètes (qui sont des petites quantités comparées à la masse du Soleil), il montre que les demi-grands axes des orbites des planètes n'ont que de petites variations périodiques. Avec Lagrange (1780), ils précisent ce résultat de stabilité. D'ailleurs Lagrange avec Clairaut (1760) développent la mécanique céleste dont le problème des trois corps. Notons enfin que l'étude de la stabilité du système solaire a été reprise récemment par Laskar (1990). Il a trouvé que le système solaire est stable au sens où les planètes ne peuvent entrer en collision pour des durées de l'ordre de la durée de vie du Soleil (10 milliards d'années). Mais les planètes Mercure, Vénus, la Terre et Mars sont quand même affectées par des comportements chaotiques qui empêchent de prédire leurs positions au delà de quelques millions d'années.

1.3.4 la Galaxie (1780,1920)

La structure de la Galaxie a pu être comprise grâce à une meilleure connaissance des distances stellaires et donc d'échapper à la seule notion de sphère céleste. Bessel (1838) et Struve (1840) ont mesuré les premières parallaxes terrestres. Ces mesures sont des mesures directes de distances (sect. 1.2.3). Les mesures indirectes de distances basées sur la luminosité intrinsèque des étoiles ont été possibles grâce aux développements de l'astrophysique : le spectre visible de l'hydrogène (Balmer 1885), la théorie d'atmosphère stellaire (Schwarzschild 1890), la loi de rayonnement des corps noirs (Planck 1906) et le

diagramme H-R (Hertzsprung et Russell 1910) qui relie température et la luminosité.

Cette période est aussi la période où de grands catalogues d'étoiles sont établis. Citons :

1888 NGC ("New General Catalogue", 12 000 nébuleuses

1890-1924 HD (225 000) étoiles

, puis plus tard :

1940 FK3 (Fundamental Katalog", 33 342 étoiles avec parallaxes, mouvements propres et températures)

Avec ces catalogues, il apparaît clairement que les constellations ne sont que des groupements apparents d'étoiles. On passe d'un modèle de galaxies où le Soleil est au centre, à un modèle où le Soleil est à 30 000 al du centre galactique.

Après la découverte de bras spiraux dans notre galaxie, Lindblad (1920) explique leur présence par la notion d'ondes de densité.

1.3.5 les autres galaxies (après 1920)

La construction de nouveaux télescopes (Mont Wilson, 2,5m ; Mont Palomar, 5m) a permis d'observer plus de "nébuleuses". Ces observations, associées à la théorie, permettent de comprendre leur structure.

On a vu (sect. 1.2.3) que Leavitt a établi une relation entre la luminosité intrinsèque et la période des étoiles variables céphéïdes.

Hubble (1923) découvre une céphéïde dans la "nébuleuse" d'Andromède et évalue ainsi sa distance à environ un million d'années lumière : Andromède est donc un objet extragalactique, c'est même une autre galaxie semblable à la notre. Un peu plus tard, en 1929, il découvre que le décalage spectral vers le rouge des galaxies est proportionnel à leur distance. Cette loi s'interprète comme une expansion de l'Univers. Elle permet aussi d'avoir une nouvelle méthode de mesure (indirecte) de distances.

Einstein (1905) publie sa théorie de la relativité restreinte : l'espace de la mécanique est encore un espace euclidien mais sa métrique tient compte de l'invariance de la vitesse de la lumière en associant le temps aux coordonnées spatiales dans un espace à quatre dimensions : l'espace-temps. En 1915, il publie la relativité générale. Cette fois il n'existe plus de repère galiléen ; tous les repères, même en accélération par rapport à un autre, sont équivalents. La topologie de l'espace n'est alors plus euclidienne et dépend de la présence de masses en son sein. La gravitation universelle n'est plus une force en tant que telle mais

issue du principe d'inertie : les trajectoires suivent les géodésiques³ de l'espace-temps qui est déformé par la présence des masses.

Cette théorie est à la base du modèle actuel d'Univers avec lequel Gamov (1948) a prédit l'existence du rayonnement fossile du "Big-Bang". Ce rayonnement a été observé en 1976 par Penzias et Wilson. Ce modèle donne une explication à l'expansion de l'Univers observée par Hubble.

1.3.6 conclusion

On a vu dans ce chapitre la manière dont sont évaluées les distances et aussi un survol de l'histoire de l'astronomie. On s'est ainsi rendu compte que la structure de l'Univers est faite de structures imbriquées :

- rotation de la Terre qui explique les mouvements diurnes des astres
- révolution de la Terre autour du Soleil puis le système solaire
- la galaxie
- l'Univers

³Les géodésiques sont les courbes qui minimisent la distance d'un point à un autre. Les géodésiques d'un espace euclidien sont les droites, celles de la sphère sont les grands cercles (voir 2.1 du chapitre 2).

Chapitre 2

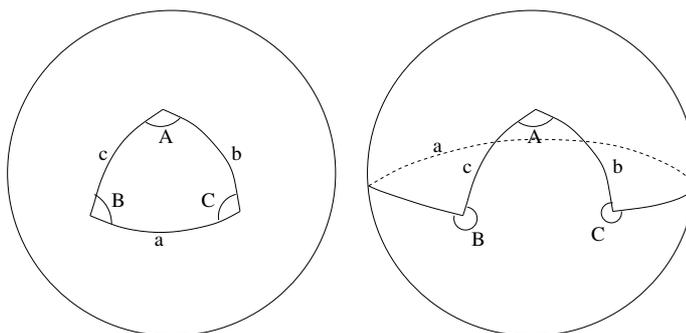
Coordonnées sur la sphère céleste

2.1 Trigonométrie sphérique

Soit une sphère dont le rayon est fixé arbitrairement à 1 et appelons O le centre de cette sphère¹.

L'intersection de tout plan passant par O avec cette sphère est un grand cercle. Ces courbes sont les géodésiques de la sphère (voir 1.3.5).

Un triangle sphérique est la figure formée par trois arcs de grand cercle reliant 2 à 2, trois points distincts A , B , et C .



On définit les cotés par :

$$a = (\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}) \quad b = (\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}}) \quad c = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$$

¹En trigonométrie sphérique, cette sphère joue un rôle similaire au cercle de rayon 1 en trigonométrie plane.

et les angles par :

$$A = \text{angles des plans } OAB \text{ et } OAC$$

$$B = \text{angles des plans } OBC \text{ et } OAB$$

$$C = \text{angles des plans } OAC \text{ et } OBC$$

Pour simplifier l'exposé, on suppose que a, b, c, A, B et C sont différents de 0 et de π . Ce qui signifie que les points A, B et C ne sont pas sur un même grand cercle.

Pour trois points A, B et C donnés, il y a $2 \times 2 \times 2$ triangles sphériques possibles. Mais il n'y en a qu'un pour lequel tous les cotés sont compris entre 0 et π , c'est le triangle sphérique simple.

La donnée de 3 nombres (par exemple A, b et c) suffit à déterminer un triangle sphérique. Etablissons les relations de Gauss qui permettent de résoudre un triangle sphérique.

Rapportons l'espace affine euclidien au repère orthonormé direct $(Oijk)$. Sans nuire à la généralité du problème, on peut choisir ce repère de telle manière que $\overrightarrow{OA} = k$ et que B soit dans le plan (Oik) . On a alors (fig. 2.1) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= (0 & 0 & 1) \\ \overrightarrow{OB} &= (\sin c & 0 & \cos c) \\ \overrightarrow{OC} &= (\sin b \cos A & \sin b \sin A & \cos b) \end{aligned}$$

Considérons maintenant un autre repère $(Oi'j'k')$ orthonormé direct tel que $\overrightarrow{OB} = i'$. Le point A est alors dans le plan $(Oi'k')$. Ce nouveau repère se déduit du précédent

par la rotation d'axe (Oj) et d'angle $c - \frac{\pi}{2}$. Si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sont les coordonnées d'un point

dans le premier repère, alors les coordonnées de ce point dans le nouveau repère sont

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(c - \frac{\pi}{2}) & 0 & -\sin(c - \frac{\pi}{2}) \\ 0 & 1 & 0 \\ +\sin(c - \frac{\pi}{2}) & 0 & \cos(c - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \text{ Déterminons alors les coordon-}$$

nées de C dans le repère $(Oi'j'k')$ de deux manières différentes :

1. par la lecture directe dans ce repère (fig. 2.1) : $C \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \sin B \\ \sin a \cos B \end{pmatrix}$

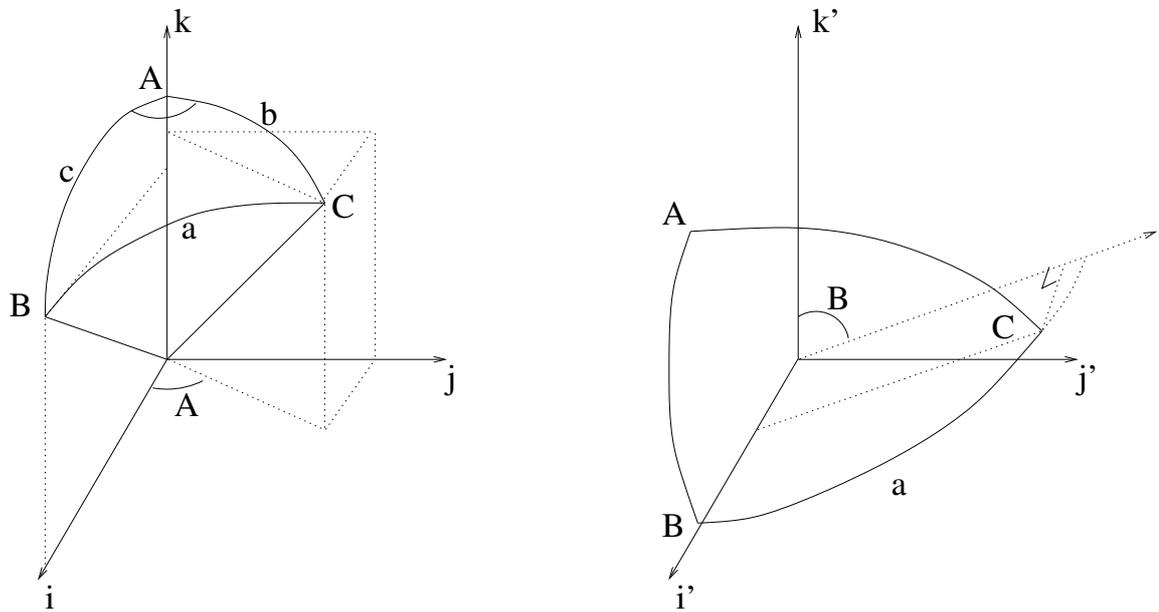


FIG. 2.1 – Coordonnées des trois points d'un triangle sphérique dans deux repères différents afin d'établir les relations de Gauss.

2. en utilisant la matrice de passage :

$$\begin{pmatrix} \sin c & 0 & \cos c \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos c & 0 & \sin c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin b \cos A \\ \sin b \sin A \\ \cos b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin b \sin c \cos A + \cos b \cos c \\ \sin b \sin A \\ -\cos c \sin b \cos A + \cos b \sin c \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi les relations de Gauss :

| | |
|---|-------|
| $\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \sin a \sin B &= \sin b \sin A \\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \end{aligned}$ | (2.1) |
|---|-------|

, et des relations équivalentes par permutations circulaires.

On peut montrer que la surface d'un triangle sphérique est

$$S = A + B + C - \pi \quad (2.2)$$

(par exemple : si $A = B = C = \frac{\pi}{2}$, on a $S = \frac{\pi}{2}$ qui correspond bien à 1/8 de la sphère).

remarque sur les triangles plans :

Dans un triangle plan on a $A + B + C = \pi$ c'est à dire, si on l'identifie à un triangle sphérique, $S = 0$. Ainsi un triangle plan peut s'identifier à un triangle sphérique sur une sphère de rayon ∞ , ou à un triangle sphérique dont a , b et c sont des infiniment petits.

Par exemple, la première des relations de Gauss s'écrit :

$$1 - \frac{a^2}{2} \simeq (1 - \frac{b^2}{2})(1 - \frac{c^2}{2}) + bc \cos A$$

qui devient, en ne gardant que le terme principal :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

De la même manière, la deuxième relation devient :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

2.2 Système de coordonnées sur la sphère

La notion de sphère céleste est issue du fait que, à un lieu donné et à une date donnée, l'observateur n'a pas accès à la distance entre lui et l'objet céleste (voir 1.2.3 du chapitre 1). Ainsi, cet observateur peut très bien considérer que tous ces objets sont à une distance arbitraire. Il peut aussi considérer qu'ils sont à une même distance (arbitraire elle aussi). De manière équivalente, on peut dire que l'observateur n'appréhende que les directions issues de sa position. Or l'ensemble de ces directions s'identifie à une sphère centrée sur ce point.

Sur la sphère céleste, on distingue la sphère locale et la sphère des fixes.

La sphère locale est liée au lieu géographique de l'observateur. Cela signifie que son horizon est "physiquement" un grand cercle de cette sphère.

La sphère des fixes est liée à la figure indéformable constituée par les images des étoiles sur la sphère céleste.

Ces deux sphères se superposent et l'un des buts de l'astrométrie est de décrire le mouvement de l'une par rapport à l'autre.

Sur une sphère, un système de coordonnées est un jeu de deux nombres qui positionnent tout les points de la sphère. Il est naturel de les prendre parmi les coordonnées sphériques λ et φ (définies au travers des coordonnées cartésiennes par $x = r \cos \lambda \cos \varphi$,

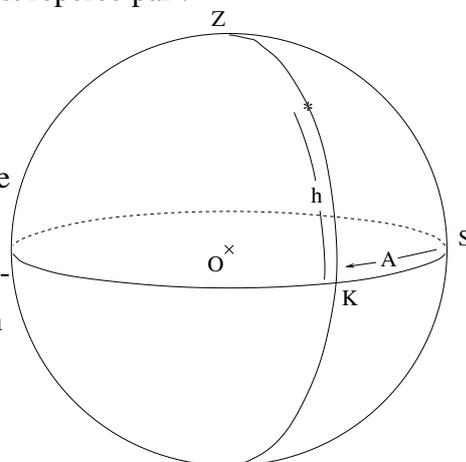
$y = r \sin \lambda \cos \varphi$ et $z = r \sin \varphi$. Il faut donc se définir **un grand cercle orienté** (ou, de manière équivalente, un point qu'on pourra nommer pôle) **et une origine sur ce grand cercle**.

Par exemple sur la Terre, le grand cercle origine est l'équateur et l'origine sur ce grand cercle est définie par le méridien (ou demi-grand cercle) origine passant par Greenwich². L'orientation de l'équateur terrestre est donnée par la convention que les longitudes sont comptées positivement vers l'est³.

2.3 Coordonnées locales

Elles correspondent au repère naturel que nous utilisons dans la vie courante : l'horizon est un grand cercle et nous sommes au centre O de la sphère. On prend donc ce grand cercle comme grand cercle origine. Le pôle correspondant est appelé Zénith (Z). La direction origine est celle où culmine le Soleil, c'est à dire la direction du Soleil à Midi (Sud). On peut dire aussi plus simplement que c'est la direction où culminent les étoiles dans leur mouvement diurne (voir plus loin). Une étoile est repérée par :

- l'azimut A : angle sphérique $SZ*$ dans le sens rétrograde
- la hauteur h : coté $*K$ où K est l'intersection du demi grand cercle $Z*$ avec l'horizon



On a :

$$0^\circ \leq A \leq 360^\circ$$

$$-90^\circ \leq h \leq +90^\circ$$

²En France, le méridien de Paris a tenu lieu de méridien origine jusqu'en 1884, date à laquelle la conférence de l'Union Astronomique Internationale (U.A.I.) à Washington choisit le méridien de Greenwich comme méridien origine. Pour que les délégués adoptent ce méridien, et non celui de Paris, le délégué britannique déclara qu'il était officiellement autorisé à annoncer que son gouvernement avait accepté d'adhérer à la convention métrique ...

³En fait à cette même conférence de Washington, les délégués ont retenu de compter les longitudes vers l'est et vers l'ouest à partir d'un méridien central. Dans ce cours, on préfère compter la longitude terrestre positivement suivant une seule direction, comme le recommandent actuellement les commissions de l'U.A.I.



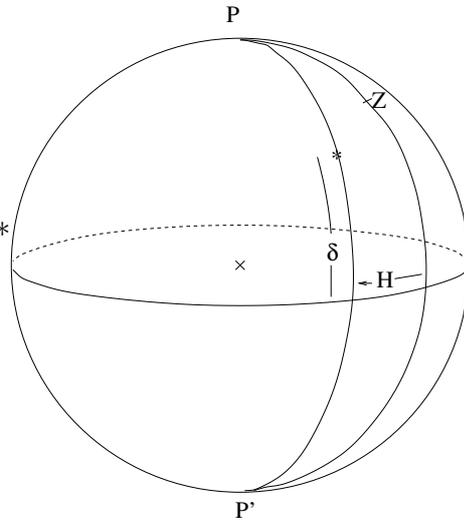
FIG. 2.2 – Traînées des étoiles autour du pôle nord céleste. Photographie obtenue avec une pose d'environ 6 heures.

2.4 Mouvement diurne et coordonnées horaires

Le mouvement diurne s'observe par le mouvement apparent des étoiles (le Soleil, la Lune et les planètes ont un mouvement de nature différente et plus compliqué) : les étoiles décrivent des arcs de cercle, centrés sur un point particulier de la sphère céleste (fig. 2.2). Ce point est appelé pôle céleste nord et noté P .

On construit à partir de ce point un nouveau système de coordonnées. Le grand cercle origine est celui correspondant au pôle P . Il est appelé équateur céleste. Le demi grand cercle origine est celui passant par le zénith. Une étoile est repérée par :

- l'angle horaire H : angle sphérique ZP^* dans le sens rétrograde
- la déclinaison $\delta := 90^\circ - P^*$



On a :

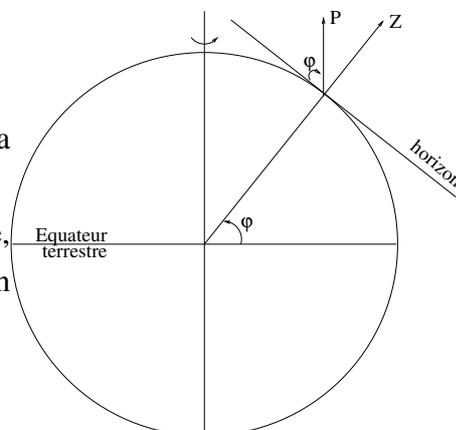
$$0 h \leq H \leq 24 h$$

$$-90^\circ \leq \delta \leq +90^\circ$$

Interprétation du mouvement diurne et hauteur du pôle sur l'horizon

Le mouvement diurne s'interprète comme étant issu du mouvement de rotation de la Terre sur elle-même. Ce mouvement peut être considéré comme uniforme en une bonne première approximation.

- la hauteur du pôle sur l'horizon est la latitude du lieu.
- P , Z et S sont sur un même grand cercle, c'est à dire, le Sud est le point sur l'horizon et sur le demi grand cercle $P'Z$.



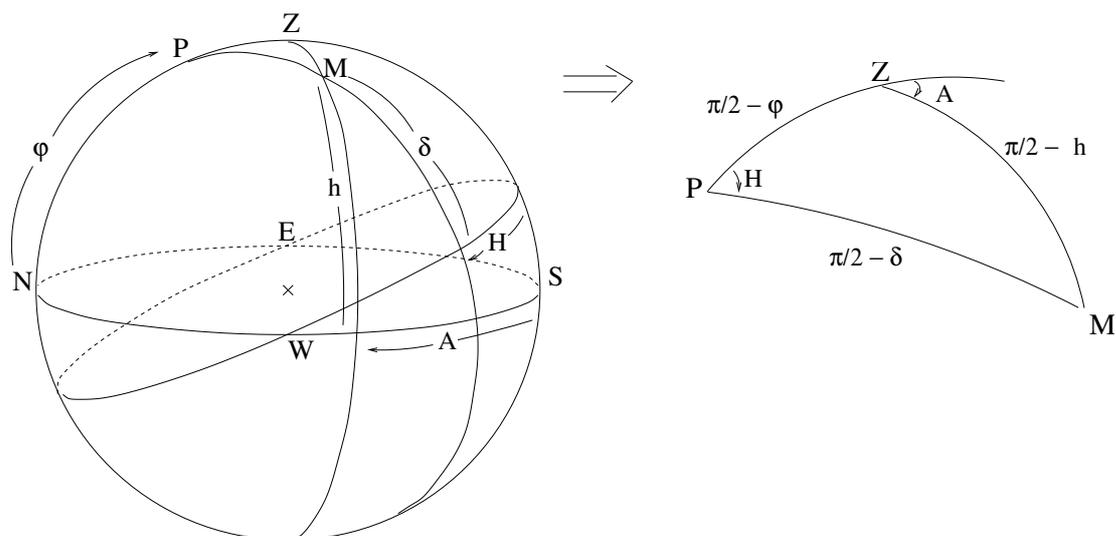
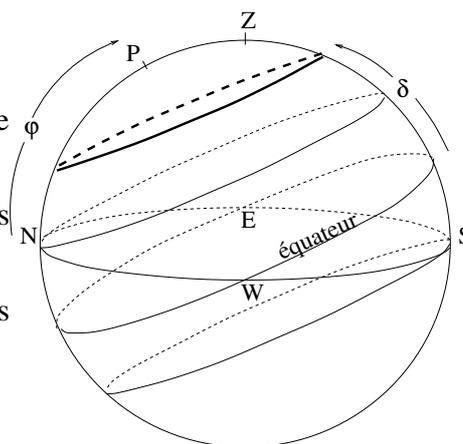


FIG. 2.3 – Liens entre les coordonnées locales et les coordonnées horaires

Soit un lieu de latitude φ avec $\varphi > 0$ et une étoile de déclinaison δ ;

- si $(\frac{\pi}{2} - \varphi) < \delta$ alors l'étoile est toujours visible. On dit qu'elle est circumpolaire.

- si $\delta < -(\frac{\pi}{2} - \varphi)$ alors l'étoile est toujours invisible



2.5 Changement de coordonnées

La figure (2.3) fait apparaître un triangle sphérique dans lequel, on peut appliquer les formules de Gauss (2.1) :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cos H \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - h\right) \sin(\pi - A) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \sin H \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - h\right) \cos(\pi - A) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cos H \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{array}{l}
 \sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H \\
 \cos h \sin A = \cos \delta \sin H \\
 \cos h \cos A = -\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos H
 \end{array} \quad (2.3)$$

De la même manière, on peut établir les formules inverses :

$$\begin{array}{l}
 \sin \delta = \sin h \sin \varphi - \cos h \cos \varphi \cos A \\
 \cos \delta \sin H = \cos h \sin A \\
 \cos \delta \cos H = \sin h \cos \varphi + \cos h \sin \varphi \cos A
 \end{array} \quad (2.4)$$

2.6 Coordonnées équatoriales et temps sidéral local

On a vu que la sphère des fixes est animée d'un mouvement de rotation uniforme par rapport à la sphère céleste locale. Si on définit un système de coordonnées sur la sphère des fixes, les étoiles auront des coordonnées constantes dans ce système.

- Le pôle est le même que pour le repère horaire (ce point est fixe dans les deux repères). Le grand cercle origine est donc aussi l'équateur.

- L'origine sur l'équateur est le point γ . Ce point est a priori arbitraire. On verra dans le chapitre suivant (chap. 4) comment il est défini. Pour l'instant, il suffit de dire qu'il est proche de la constellation des Poissons.

Les coordonnées équatoriales sont :

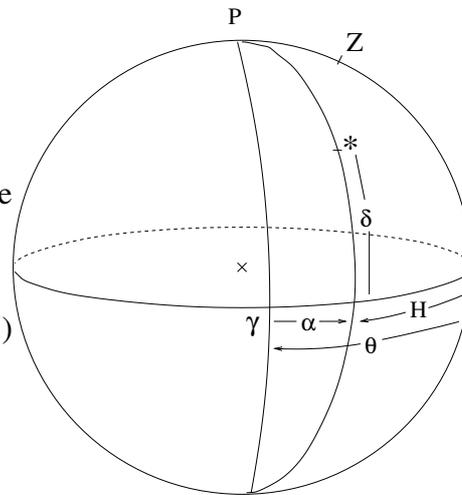
- l'ascension droite α : angle γP^* dans le sens direct
- la déclinaison δ : (la même que pour les coordonnées horaires)

Le mouvement de la sphère des fixes par rapport à la sphère locale permet de définir une échelle de temps : le temps sidéral local. Il est noté θ et c'est l'angle horaire du point

γ .

Quelque soit l'étoile considérée et à chaque instant, on a :

$$\underline{H = \theta - \alpha} \quad (2.5)$$



Le mouvement diurne étant issu de la rotation de la Terre sur elle même, on peut relier les temps sidéraux de deux lieux différents. Soit deux lieux A et B sur la Terre, la différence entre leur heure sidérale est égale à la différence de leur longitude terrestre L . Si on compte positivement les longitudes à l'est, on a :

$$L_A - L_B = \theta_A - \theta_B \quad (2.6)$$

Le jour sidéral est la durée qui s'écoule entre deux passages au Sud du point γ .

Chapitre 3

Le problème des deux corps

3.1 Formulation

On se donne un repère galiléen défini par le repère orthonormé suivant : $\mathfrak{R}_O = (Oxyz)$.

Soient deux points $M_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ de masses respectives m_1 et m_2 . Ces deux particules matérielles s'attirent selon la loi de Newton :

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_1}}{dt^2} &= -K \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\overrightarrow{M_2 M_1}}{r} \\ m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_2}}{dt^2} &= -K \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{r} \end{aligned} \quad (3.1)$$

où $r = M_1 M_2$ est la distance mutuelle et K la constante de gravitation universelle. (3.1) est un système différentiel d'ordre 2 avec 6 degrés de liberté. La résolution de ce problème d'ordre 12 nécessite donc d'introduire 12 constantes d'intégration arbitraires.

En ajoutant les deux équations de (3.1), on obtient $\frac{d^2(m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2})}{dt^2} = \vec{0}$. En introduisant le point G centre de gravité de M_1 et M_2 et si $m_1 + m_2 \neq 0$, cette dernière expression devient $\frac{d^2 \overrightarrow{OG}}{dt^2} = \vec{0}$. Le mouvement de G est donc rectiligne et uniforme. Sur les 12 constantes arbitraires, 6 définissent ce mouvement (3 pour la position initiale de G , et 3 sa vitesse).

Le point O du repère : $\mathfrak{R}_O = (Oxyz)$ peut ainsi être pris en G . En utilisant $\overrightarrow{M_2 M_1} =$

$\frac{m_1+m_2}{m_2}\overrightarrow{GM}_1$ et $\overrightarrow{M}_1\overrightarrow{M}_2 = \frac{m_1+m_2}{m_1}\overrightarrow{GM}_2$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{d^2\overrightarrow{GM}_1}{dt^2} &= -K \frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2} \frac{\overrightarrow{GM}_1}{(GM_1)^3} \\ \frac{d^2\overrightarrow{GM}_2}{dt^2} &= -K \frac{m_1^3}{(m_1+m_2)^2} \frac{\overrightarrow{GM}_2}{(GM_2)^3}\end{aligned}\quad (3.2)$$

Pour pouvoir écrire la première équation, on a simplifié les deux membres de l'égalité par m_1 . Cela signifie que m_1 doit être non nulle. De la même manière m_2 doit être elle aussi non nulle.

remarque :

Il n'est nécessaire de résoudre que l'une ou l'autre des deux équations car, par exemple, le mouvement de M_2 se déduit de celui de M_1 par $\overrightarrow{GM}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\overrightarrow{GM}_1$.

Le point G n'est pas un point physique dans le sens où il ne s'observe pas mais se calcule. C'est le mouvement relatif de M_1 autour de M_2 qui est observé :

En soustrayant les deux équations de (3.1), toujours après avoir simplifié les deux membres de l'égalité par m_1 ou m_2 , on obtient :

$$\frac{d^2\overrightarrow{M}_2\overrightarrow{M}_1}{dt^2} = -K(m_1 + m_2) \frac{\overrightarrow{M}_2\overrightarrow{M}_1}{(M_2M_1)^3}\quad (3.3)$$

le problème képlérien :

(3.2) et (3.3) peuvent s'écrire :

$$\boxed{\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\overrightarrow{r}}{r^3}}\quad (3.4)$$

où $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$ et $\mu > 0$. C'est le problème de Képler.

3.2 Invariance du moment cinétique et de l'énergie

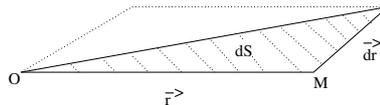
Plan de l'orbite et loi des aires

Par l'équation (3.4), on a la relation suivante qui est vraie pour toute force centrale : $\vec{r} \wedge \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{0}$, que l'on peut encore écrire $\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}) = \vec{0}$, c'est à dire :

$$\boxed{\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{G} \quad (\text{Cste})} \quad \text{invariance du moment cinétique} \quad (3.5)$$

Les vecteurs \vec{r} et $\frac{d\vec{r}}{dt}$ seront donc toujours orthogonaux à \vec{G} . Ce qui signifie que, si $\vec{G} \neq \vec{0}$, le mouvement se fait dans le plan passant par le point O et orthogonal à \vec{G} .

De plus, si on note dS l'élément d'aire parcouru par le rayon vecteur \vec{r} pendant l'élément de temps dt ,



on a $Gdt = 2dS$ puisque $\|\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}\| = Gdt$. Ce qui donne la loi des aires : $\frac{dS}{dt} = G/2$ (=Cste). Ainsi, l'orientation de \vec{G} indique le plan du mouvement et son module donne la loi des aires. Si $\vec{G} = \vec{0}$, le mouvement est rectiligne et porté par la direction commune de \vec{r} et $\frac{d\vec{r}}{dt}$.

Energie d'une orbite

En remarquant que $\frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\frac{\mu}{r}) = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$, où $\frac{\partial}{\partial \vec{r}}$ correspond à l'opérateur $\overrightarrow{\text{Grad}}$ qui est un opérateur de dérivation, et en multipliant l'expression (3.4) par $\frac{d\vec{r}}{dt}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} - \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\frac{\mu}{r}) &= 0 \\ \text{ou encore } \frac{d}{dt}(\frac{1}{2} \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}) - \frac{d}{dt}(\frac{\mu}{r}) &= 0 \end{aligned}$$

En notant v la vitesse (ie : $v = \sqrt{\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}}$), on a $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r}) = 0$. Soit :

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = h \quad (\text{cste})} \quad \text{intégrale de l'énergie} \quad (3.6)$$

Si h est négatif alors r est borné et le corps ne peut s'éloigner à l'infini. Inversement, si on suppose que le corps peut s'éloigner à l'infini (c'est à dire si $r \rightarrow \infty$, et dans ce cas h doit être positif) alors $\sqrt{2h}$ représente la "vitesse à l'infini".

3.3 Résolution dans le plan de l'orbite

Dans le plan du mouvement, on repère M par ses coordonnées polaires (r, θ) . L'intégrale des aires est :

$$\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r} \wedge \left(\frac{d\vec{r}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \right) = \vec{G}$$

d'où :

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = G \quad (3.7)$$

On a aussi besoin de l'intégrale de l'énergie :

$$h = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r}$$

Puisque $\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right\| = 1$, $\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\| = r$ et que $\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \perp \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$, on peut écrire :

$$v^2 = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

éliminons dt par (3.7), c'est à dire $dt = \frac{r^2}{G} d\theta$:

$$v^2 = G^2 \left[\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right]$$

En posant $u = \frac{1}{r}$ (et donc $du = -u^2 dr$), on obtient :

$$v^2 = G^2 \left[u^4 \left(\frac{du}{-u^2 d\theta} \right)^2 + u^2 \right]$$

On en déduit la première formule de Binet :

$$v^2 = G^2 \left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right) \quad (3.8)$$

3.4. LES MOUVEMENTS ELLIPTIQUES, PARABOLIQUES ET HYPERBOLIQUES 31

En substituant cette expression dans h , on a :

$$\frac{G^2}{2} \left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right) - \mu u = h$$

On dérive cette expression par rapport à θ :

$$G^2 \left(u \frac{du}{d\theta} + \frac{du}{d\theta} \frac{d^2u}{d\theta^2} \right) - \mu \frac{du}{d\theta} = 0$$

, ce qui donne la *deuxième formule de Binet* :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{G^2} \quad (3.9)$$

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre. Les solutions peuvent s'écrire :

$$u = \frac{\mu}{G^2} + \lambda \cos(\theta - \alpha) \quad , \text{ soit encore } r = \frac{1}{\frac{\mu}{G^2} + \lambda \cos(\theta - \alpha)}$$

λ et α étant des constantes réelles arbitraires. En posant $p = G^2/\mu$ et $e = \lambda G^2/\mu$, on a :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \alpha)} \quad (3.10)$$

Remarque : α représentant la direction du péricentre.

3.4 Les mouvements elliptiques, paraboliques et hyperboliques

En coordonnées polaires dans un repère $(O\vec{u}_0\vec{v}_0)$ où $(O\vec{u}_0)$ est la direction du péricentre on a la formule :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos W} \quad \text{avec } p = G^2/\mu \quad (3.11)$$

W est appelée anomalie vraie.

On a bien évidemment :

$$1 - e \leq 1 + e \cos W \leq 1 + e$$

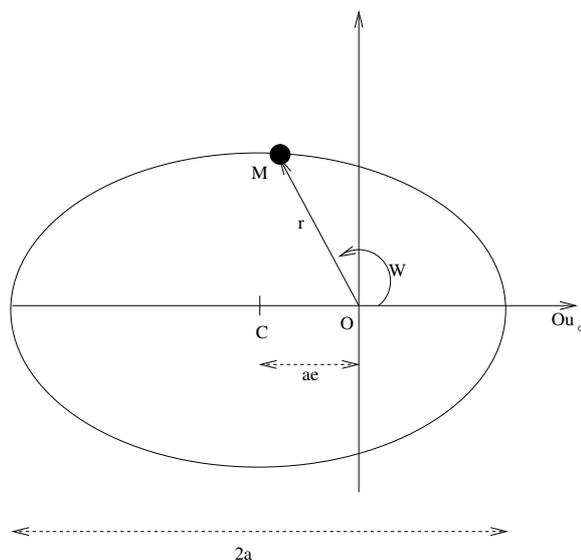


FIG. 3.1 – Ellipse du mouvement képlérien

Il faut donc discuter suivant la nature de la conique.

- Si $e < 1$, la trajectoire est une ellipse (si $e = 0$, c'est un cercle et $(O\vec{u}_0)$ est choisi arbitrairement) et :

$$r_m = \frac{p}{1+e} \leq r \leq r_M = \frac{p}{1-e}$$

Ainsi r_m est atteint pour $W = 0$, et r_M pour $W = \pi$. Si on note $2a$ la distance entre le péricentre et l'apocentre, $2a = r_m + r_M$ (a est appelé le demi-grand axe) et on a

$$\begin{aligned} p &= a(1 - e^2) \\ r_m &= a(1 - e) \\ r_M &= a(1 + e) \end{aligned} \tag{3.12}$$

- Si $e > 1$, la trajectoire est une hyperbole et on a :

$$0 \leq 1 + e \cos W \leq 1 + e$$

et donc :

$$\frac{p}{1+e} \leq r (\leq +\infty)$$

La limite ∞ correspond à $1 + e \cos W = 0$, c'est à dire quand W tend vers l'angle $W_\infty = +\arccos(-1/e)$ ou vers l'angle $-W_\infty$. On utilisera plutôt l'angle δ , appelé angle de dévia-

3.4. LES MOUVEMENTS ELLIPTIQUES, PARABOLIQUES ET HYPERBOLIQUES 33

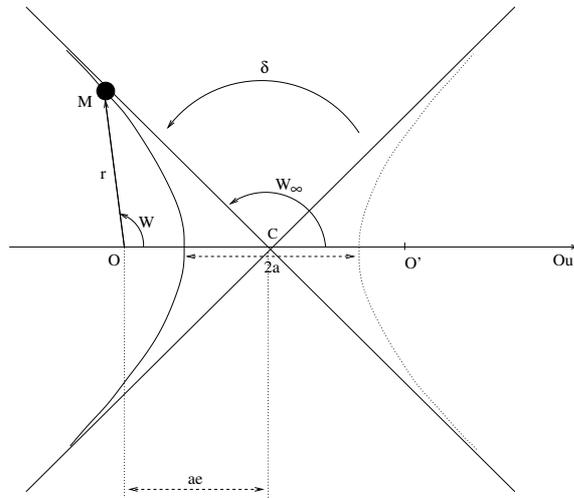


FIG. 3.2 – Hyperbole du mouvement képlérien

tion puisqu’il correspond à la déviation angulaire d’un corps qui a mouvement (presque) rectiligne et uniforme et qui retourne, après avoir interagit avec un autre corps, sur un autre mouvement (presque) rectiligne et uniforme. δ est lié à W_∞ par $\delta = \pi - 2(\pi - W_\infty)$, soit :

$$\delta = 2W_\infty - \pi \quad (3.13)$$

La branche de l’hyperbole en pointillés serait la courbe parcourue par M si p était négatif, c’est à dire si $\mu < 0$ (répulsion). On peut encore noter $2a$ la distance entre le péricentre et “l’apocentre” (ici le symétrique du péricentre par rapport à C), d’où

$$2a = -\frac{p}{1-e} - \frac{p}{1+e} = \frac{p(1+e) + p(1-e)}{e^2 - 1}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} p &= a(e^2 - 1) \\ r_m &= a(e - 1) \end{aligned} \quad (3.14)$$

- Si $e = 1$, la trajectoire est une parabole on a $\frac{p}{2} \leq r (\leq +\infty)$. On ne peut définir dans ce cas de demi-grand axe. La parabole est un cas limite entre l’ellipse et l’hyperbole. On peut se la représenter mentalement comme une ellipse dont le deuxième foyer (et donc l’apocentre ou même le centre C) est rejeté à l’infini¹.

¹Réciproquement, on peut aussi imaginer une “hyperbole limite” même si c’est plus difficile. Le

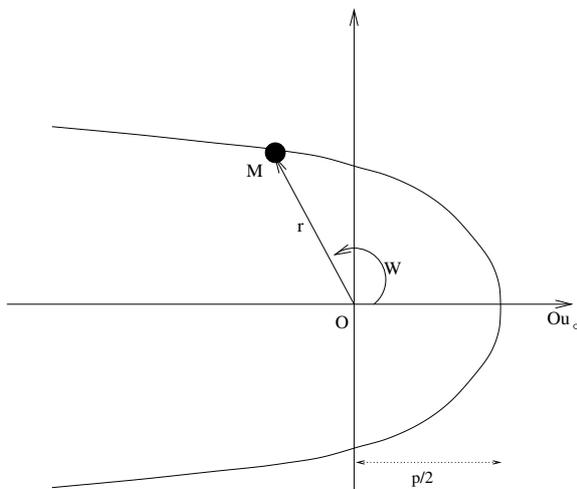


FIG. 3.3 – Parabole du mouvement képlérien

On a vu que $h = (e^2 - 1)\mu/p$, d'où :

$$\left\| \begin{array}{ll} h = -\frac{\mu}{2a} & \text{pour le cas elliptique} \\ h = 0 & \text{pour le cas parabolique} \\ h = +\frac{\mu}{2a} & \text{pour le cas hyperbolique} \end{array} \right. \quad (3.15)$$

C'est donc le signe de h qui caractérise la nature de la conique et $|h|$ caractérise sa taille. Cette formule (3.15) est importante car avec l'intégrale de l'énergie (3.6), elles permettent de résoudre très facilement quelques petits problèmes comme ceux liés aux calculs de la vitesse de libération, la vitesse circulaire.

Exercice : vitesse de libération, vitesse de satellisation, nuage de Oort,

...

On a ainsi vu 5 constantes arbitraires (pour $\vec{G} \neq \vec{0}$) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{G} & (3) \\ h & (1) \\ \text{direction de}(Ou_0) & (1) \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{direction de } \vec{G} & (2 \text{ angles}) \\ a & (1) \\ e & (1) \\ \text{direction de}(Ou_0) & (1) \end{array} \right.$$

La sixième constante arbitraire est issue du mouvement sur la trajectoire que nous allons voir dans la section suivante.

deuxième foyer est rejeté à l'infini et donc aussi la deuxième branche. W_∞ tend vers π mais le centre C étant rejeté à l'infini, cela "donne" une branche parabolique de direction asymptotique (Ou_0) .

3.5 Mouvement sur la trajectoire (cas elliptique)

La trajectoire est définie par :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos W} \text{ avec } e < 1$$

, et le mouvement sur la trajectoire est donné par la loi des aires :

$$r^2 dW = G dt \text{ où } G^2 = \mu p = a(1 - e^2)\mu$$

En définissant t_p comme étant l'instant de passage au péricentre (ie : en $t = t_p$, $W = 0$), on obtient :

$$\int_0^W r^2 dW = G(t - t_p)$$

soit encore :

$$I = \int_0^W \frac{dW}{(1 + e \cos W)^2} = [a(1 - e^2)]^{-3/2} \sqrt{\mu} (t - t_p)$$

Calculons I . Pour ramener l'expression à celle d'une fraction rationnelle, on doit poser :

$$X = \tan \frac{W}{2}, \text{ d'où}$$

$$\frac{dW}{dX} = \frac{2}{1 + X^2} \text{ et } \cos W = \frac{1 - X^2}{1 + X^2}$$

On obtient donc² :

$$I = \int_0^X \frac{2(1 + X^2)dX}{[(1 + X^2) + e(1 - X^2)]^2}$$

Pour intégrer une fraction rationnelle, il est souvent judicieux de la décomposer en éléments simples. Celle-ci est déjà un élément "simple" car l'expression dans le crochet $(1 - e)X^2 + (1 + e)$ est non nul. On pose donc

$$Y^2 = \frac{1 - e}{1 + e} X^2 \text{ afin que le crochet devienne } (1 + e)(1 + Y^2)$$

Puisque

$$Y dY = \frac{1 - e}{1 + e} X dX \text{ et } 1 + X^2 = 1 + \frac{1 + e}{1 - e} Y^2$$

²Mathématiquement la notation $\int_0^X f(X)dX$ n'a pas de sens. Il faudrait utiliser une autre notation pour le X de l'une des deux bornes de l'intégrale ce qui alourdirait beaucoup les notations.

, on a :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^Y \frac{2[(1-e) + (1+e)Y^2]}{(1-e)(1+e)^2(1+Y^2)^2} \sqrt{\frac{1-e}{1+e} \frac{1+e}{1-e}} dY \\ &= \frac{2}{(1-e)^{3/2}(1+e)^{3/2}} \left[\int_0^Y \frac{dY}{1+Y^2} - e \int_0^Y \frac{1-Y^2}{(1+Y^2)^2} dY \right] \end{aligned}$$

Il suffit de poser $Y = \tan \frac{E}{2}$ pour avoir simplement :

$$I = \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} \left[\int_0^E dE - e \int_0^E \cos E dE \right]$$

On a ainsi :

$$a^{-3/2} \sqrt{\mu} (t - t_p) = E - e \sin E$$

Il est commode de poser

$$n = a^{-3/2} \sqrt{\mu} \text{ et } M = n(t - t_p)$$

M est un angle et n une vitesse angulaire appelée moyen mouvement. En un instant $t + \frac{2\pi}{n}$, M augmente de 2π . Or $M = E - e \sin E$, donc E augmente de 2π . Et puisque $\tan \frac{W}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$, W augmente aussi de 2π . On en déduit que r est périodique de W , E et M de période 2π . De plus W , E et M s'annulent en même temps en $t = t_p$. Le mouvement est périodique de période $T = \frac{2\pi}{n}$ et on a la troisième loi de Képler :

$$n^2 a^3 = \mu \text{ ou } \frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2} \quad (3.16)$$

En résumé :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad r &= \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos W} && W \text{ est l'anomalie vraie} \\ \text{(b)} \quad \tan \frac{W}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} && E \text{ est l'anomalie excentrique} \\ \text{(c)} \quad M &= n(t - t_p) && M \text{ est l'anomalie moyenne} \\ \text{(d)} \quad n^2 a^3 &= \mu \\ \text{(e)} \quad M &= E - e \sin E && \text{équation de képler} \end{aligned} \quad (3.17)$$

De cette manière si les éléments d'orbite sont donnés³ et si μ est donné alors, à une date t ,

³soit la position du plan de l'orbite, la direction du périastre, l'excentricité, le demi-grand axe et t_p .

on calcule :

M par (c), n étant donné par (d)

E en résolvant l'équation de Képler (e)

W par (b)

r par (a)

Au lieu de calculer r et W , on peut vouloir les coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} x &= r \cos W \\ y &= r \sin W \end{aligned} .$$

$$\begin{aligned} \cos W &= \frac{1 - X^2}{1 + X^2} = \frac{1 - \frac{1+e}{1-e}Y^2}{1 + \frac{1+e}{1-e}Y^2} = \frac{(1-e) - (1+e)Y^2}{(1-e) + (1+e)Y^2} = \frac{(1-Y^2) - e(1+Y^2)}{(1+Y^2) - e(1-Y^2)} \\ &= \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \\ \sin W &= \frac{2X}{1 + X^2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{Y}{1 + \frac{1+e}{1-e}Y^2} \\ &= \sqrt{1-e^2} \frac{2Y}{(1-e) + (1+e)Y^2} = \sqrt{1-e^2} \frac{2Y}{(1+Y^2) - e(1-Y^2)} \\ &= \sqrt{1-e^2} \frac{\sin E}{1 - e \cos E} \end{aligned}$$

$$1 + e \cos W = \frac{(1 - e \cos E) + (e \cos E - e^2)}{1 - e \cos E} \Rightarrow r = a(1 - e \cos E)$$

On a ainsi :

$$r = a(1 - e \cos E)$$

$$x = r \cos W = a(\cos E - e) \tag{3.18}$$

$$y = r \sin W = a\sqrt{1-e^2} \sin E$$

Ces formules permettent d'interpréter géométriquement l'angle E (fig.3.4). Une ellipse est déduite de son cercle principal $C(c, a)$ par une affinité de rapport $\frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2}$ perpendiculaire au grand axe. On peut aussi remarquer que, si on limite à l'ordre 1 en e ,

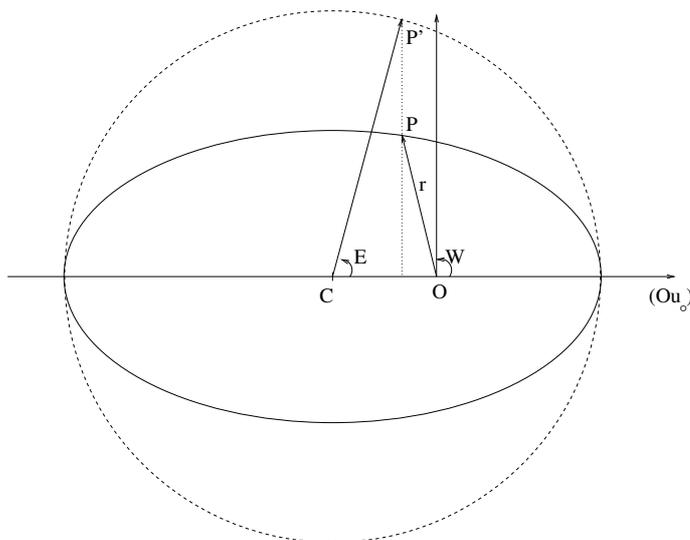


FIG. 3.4 – L'ellipse déduite de son cercle principal

on obtient $x = a(\cos E - e)$. Ainsi, pour de petites excentricités, l'ellipse pourra être vue comme un cercle excentré, c'est à dire dont le centre est à la distance ae de O .
 $y = a \sin E$

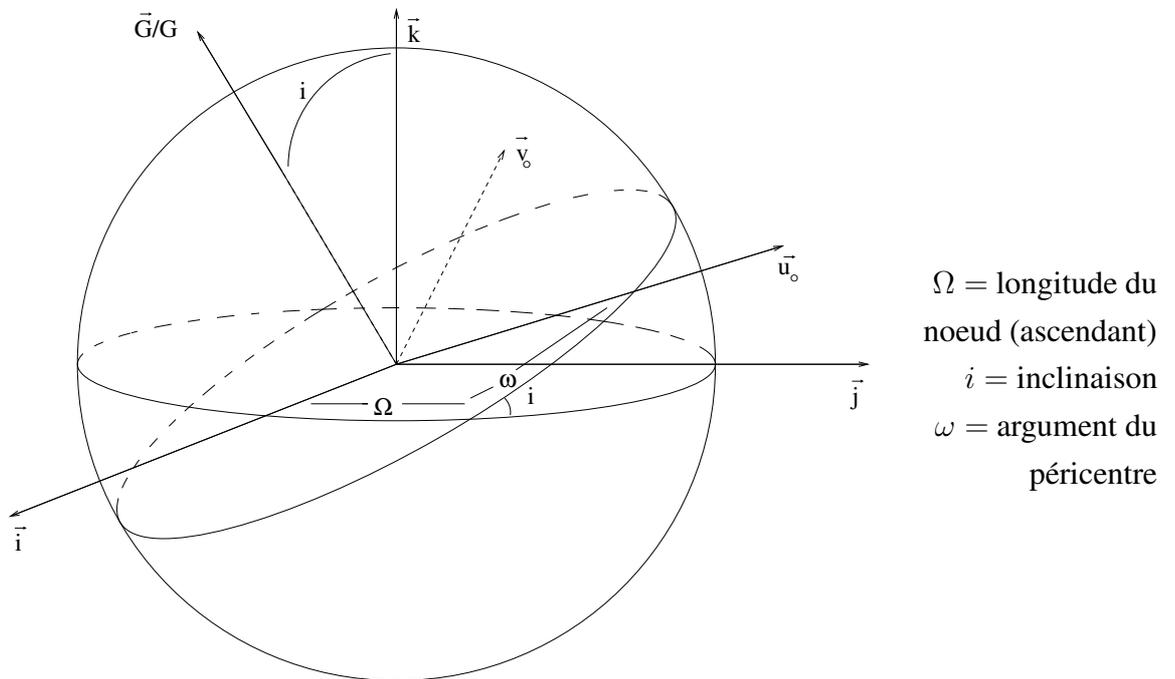
3.6 Eléments d'orbites

L'intégration du problème képlérien a fait apparaître 6 constantes arbitraires en plus du paramètre μ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{G}/G & (2) \\ \text{direction de}(Ou_0) & (1) \\ h \text{ ou } a & (1) \\ e & (1) \\ t_p & (1) \end{array} \right.$$

On a vu que $R_0 = (O\vec{u}_0, \vec{v}_0, \frac{\vec{G}}{G})$ est le repère propre de la trajectoire. Il faut repérer R_0 par rapport à un repère extérieur indépendant $R = (Oijk)$. Cela peut se faire par les classiques angles d'Euler⁴ : Ω, i, ω

⁴Les angles d'Euler sont issues de la succession de rotations dans "l'ordre 313", c'est à dire une rotation de Ω autour du troisième axe, puis une rotation de i autour du (nouveau) second axe et une rotation de ω autour du (nouveau) troisième axe. On aurait pu imaginer d'autres successions mais celle définissant les angles d'Euler est la plus utilisée.



Ces trois angles dépendent évidemment du choix de R . Il se peut que $i = 0^\circ$, dans ce cas Ω n'est pas défini ainsi que ω . Plus généralement, si i est petit, Ω et ω sont mal déterminés. Pour éviter ce problème on utilise plutôt

$$\varpi = \Omega + \omega \text{ longitude du péricentre} \quad (3.19)$$

De la même manière si e est petit W , E et M sont mal déterminés. C'est pourquoi on utilise :

$$\begin{aligned}
 l &= \varpi + W && \text{longitude vraie} \\
 F &= \varpi + E && \text{longitude excentrique} \\
 \lambda &= \varpi + M && \text{longitude moyenne}
 \end{aligned} \quad (3.20)$$

A la place de t_p , lui aussi mal défini si e est petit, on utilise $\lambda_0 = \lambda(t_0)$, où t_0 est une date origine choisie arbitrairement (par exemple : $t_0 = J2000$ c'est à dire le 1 janvier 2000 à 12h).

TAB. 3.1 – Éléments moyens des orbites héliocentriques des principales planètes du système solaire, rapportés à l'écliptique et à l'équinoxe moyens J2000 et pour la date $t_0 = \text{J2000}$.

| | a ua | e | i ° | Ω ° | ϖ ° | λ_0 ° | n "/jour |
|---------|----------|--------|--------|---------------|---------------|------------------|-------------|
| Mercure | 0,38710 | 0,2056 | 7,00 | 48,33 | 77,46 | 252,25 | 14732,42 |
| Vénus | 0,72333 | 0,0068 | 3,39 | 76,68 | 131,56 | 181,98 | 5767,67 |
| Terre | 1,00000 | 0,0167 | 0,00 | - | 102,94 | 100,47 | 3548,19 |
| Mars | 1,52368 | 0,0934 | 1,85 | 49,56 | 336,06 | 355,43 | 1886,52 |
| Jupiter | 5,20260 | 0,0485 | 1,30 | 100,46 | 14,33 | 34,35 | 299,128 |
| Saturne | 9,55491 | 0,0555 | 2,49 | 113,66 | 93,06 | 50,08 | 120,455 |
| Uranus | 19,21845 | 0,0463 | 0,77 | 74,01 | 173,00 | 314,05 | 42,231 |
| Neptune | 30,11039 | 0,0090 | 1,77 | 131,78 | 48,12 | 304,39 | 21,534 |
| Pluton | 39,44 | 0,2485 | 17,13 | 110,7 | 224,6 | 237,7 | 14,3 |

Ainsi on considère souvent les éléments d'orbite suivant :

$$\underline{(a, e, i, \Omega, \varpi, \lambda_0)}$$

ou encore

$$\underline{(a, z, \zeta, \lambda_0)}$$

où

$$z = e \exp \sqrt{-1} \varpi \quad \text{et} \quad \zeta = \sin \frac{i}{2} \exp \sqrt{-1} \Omega$$

Ces variables complexes ont l'avantage d'être régulières. En effet si e est nul, ϖ n'est pas définie mais les deux coordonnées cartésiennes le sont puisque $z = 0$ (de même avec ζ).

Le tableau (3.1) donne les éléments moyens des orbites héliocentriques des principales planètes du système solaire, rapportés à l'écliptique et à l'équinoxe moyens J2000 (voir Chap. 4) et pour la date $t_0 = \text{J2000}$.

De plus, le tableau (3.2) donne les masses des principales planètes du système solaire et le tableau (3.3) celles de quelques uns des satellites de ces planètes.

3.7 La navigation spatiale

La technique du tremplin gravitationnel qui est très utilisée en navigation spatiale, consiste à utiliser la masse d'un gros corps (par exemple Jupiter) pour dévier une trajec-

TAB. 3.2 – Inverse de la masse des principales planètes du système solaire. L'unité de masse est la masse du Soleil.

| | | | |
|--------------|-----------|---------|---------------|
| Mercure | 6 023 600 | Saturne | 3498,5 |
| Vénus | 408 523,5 | Uranus | 22 869 |
| Terre + Lune | 328 900,5 | Neptune | 19 314 |
| Mars | 3 098 710 | Pluton | 130 000 000 * |
| Jupiter | 1047,355 | Cérès | 1 700 000 000 |

* Avant la découverte de son satellite Charon en 1978 qui a permis d'évaluer correctement la masse de Pluton grâce à la troisième loi de Képler, cette masse était surestimée à 1 / 3 000 000.

TAB. 3.3 – Inverse de la masse des principaux satellites de planètes. L'unité de masse est la masse de la planète correspondante.

| planète | satellite | $\frac{m_{\text{planète}}}{m_{\text{satellite}}}$ | planète | satellite | $\frac{m_{\text{planète}}}{m_{\text{satellite}}}$ |
|---------|-----------|---|----------|------------|---|
| Terre | Lune | 81,301 | Mars | Phobos | 50 500 000 |
| | | | | Deimos | 360 000 000 |
| Jupiter | Io | 21 276,6 | Saturne | Mimas | 15 800 000 |
| | Europe | 39 062,5 | | Encelade | 11 000 000 |
| | Ganymède | 12 755,1 | | Téthys | 943 400 |
| | Callisto | 17 857,1 | | Dioné | 509 400 |
| Uranus | Miranda | 1 300 000 | Rhéea | 231 000 | |
| | Ariel | 64 000 | Titan | 4225,86 | |
| | Umbriel | 74 000 | Hypérion | 30 000 000 | |
| | Titania | 24 600 | Japet | 320 000 | |
| | Obéron | 28 800 | | | |
| | | | | | |
| Pluton | Charon | 8,0 | Neptune | Triton | 4780 |
| | | | | Néréide | 5 000 000 |

toire.

Une sonde voyage dans le système solaire suffisamment loin des autres planètes et notamment de Jupiter. Ainsi on suppose que son mouvement est képlérien avec

$$\mu_{\odot} = KM_{\odot} \text{ d'origine } \odot$$

Ensuite, cette trajectoire amène la sonde dans le voisinage de Jupiter. On peut définir une “sphère d’influence” à Jupiter, à l’intérieur de laquelle l’influence du Soleil est (considérée) négligeable par rapport à celle de Jupiter (et inversement à l’extérieur de cette sphère). Dans la description qui suit, il n’est pas nécessaire de définir plus précisément cette sphère⁵ car on suppose que la sonde passe très rapidement près de Jupiter de manière à ce que l’on puisse négliger le temps d’interaction avec Jupiter (quelques heures) par rapport au temps de parcours de l’orbite héliocentrique (quelques années). On a donc à l’intérieur de la sphère d’influence un mouvement képlérien hyperbolique avec

$$\mu_J = KM_J \text{ d'origine } J$$

Le mouvement est nécessairement hyperbolique puisque, vue de Jupiter, la sonde “arrive de l’infini” avec une vitesse (à l’infini) non nul (voir 3.6).

A la sortie de la sphère d’influence, la vitesse jovicentrique a simplement changé de direction et donc la vitesse héliocentrique a changé (en direction et en module).

La formule (3.13) nous donne la déviation de la vitesse jovicentrique (figure 3.5) :

$$\sin \frac{\delta}{2} = \sin\left(\frac{-\pi + 2W_{\infty}}{2}\right) = -\cos W_{\infty} = 1/e$$

Or $h = +\frac{\mu}{2a} = \frac{V_{\infty}^2}{2}$ et $r_m = a(e - 1)$. On en déduit :

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{1}{1 + \frac{r_m V_{\infty}^2}{\mu}} \quad (3.21)$$

⁵Si on le faisait notre description resterait quand même une approximation.

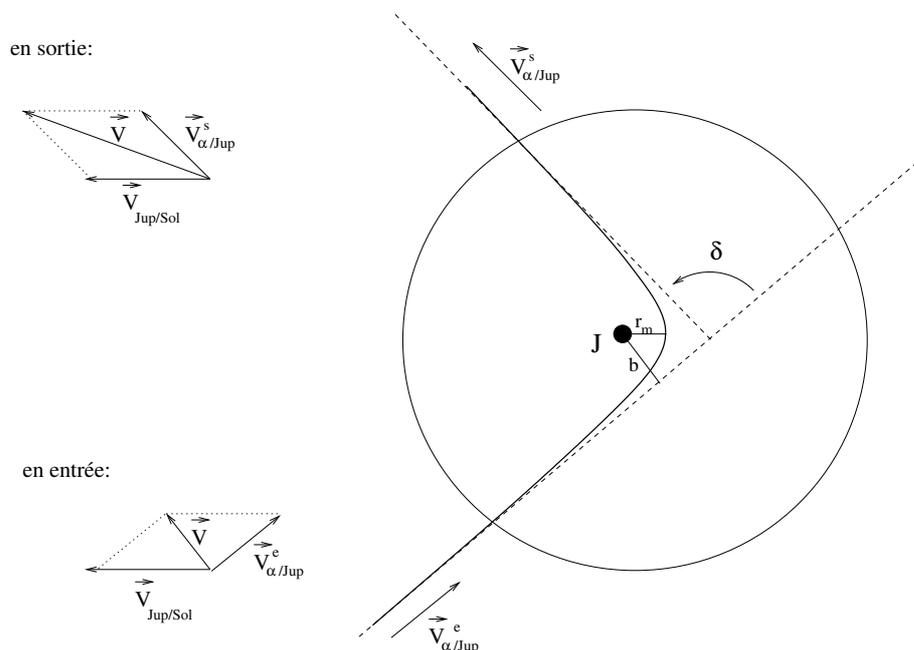


FIG. 3.5 – Principe du tremplin gravitationnel

Puisque $b = a\sqrt{e^2 - 1}$, on peut aussi écrire :

$$\sin^2 \frac{\delta}{2} = \frac{1}{1 + \frac{b^2 V_\infty^4}{\mu^2}} \quad (3.22)$$

La figure (3.5) aide à comprendre l'approximation qui est faite ici. Celle-ci consiste à supposer que le mouvement héliocentrique de la sonde juste avant l'interaction avec Jupiter est rectiligne et uniforme (avec la vitesse \vec{V}_∞^e) ce qui permet de l'assimiler à la première asymptote (de même après l'interaction avec la deuxième asymptote). Cette supposition signifie que le temps d'interaction est très court. C'est en ce sens que le tremplin gravitationnel peut être assimilable à un choc : "instantanément" le vecteur vitesse de la trajectoire est changé. C'est pour cela que l'on parle aussi de "billard" gravitationnel, la loi du changement de vitesse étant donnée ici par (3.21) ou (3.22).

Chapitre 4

Le mouvement du Soleil

Le Soleil se déplace sur la sphère des fixes, c'est à dire α_{\odot} et δ_{\odot} ne sont pas constants.

- Les variations de δ_{\odot} s'observent par

la variation de la durée du jour
de la hauteur du Soleil à midi
d'azimut au coucher du Soleil (ou au lever)

- Les variations de α_{\odot} s' "observent" par

le déplacement du Soleil dans les constellations du zodiac.

4.1 Coordonnées écliptiques

Puisque le mouvement du Soleil autour de la Terre est pratiquement une courbe plane, le mouvement du Soleil parmi ces constellations est un grand cercle. On le nomme écliptique. On observe que le Soleil parcourt tout l'écliptique en 366,2 jours sidéraux. Ce temps est appelé l'année.

Soit E le pôle de l'écliptique, on a :

$$\widehat{EP} = \omega = 23^{\circ}26'$$

P étant le pôle céleste nord. ω est appelé l'obliquité.

Le point γ , vu au chapitre 2) est défini par l'intersection de l'écliptique avec l'équateur pour lequel le Soleil passe avec une déclinaison croissante (équinoxe de printemps).

Ce point est l'origine sur l'écliptique et les coordonnées écliptiques sont donc :

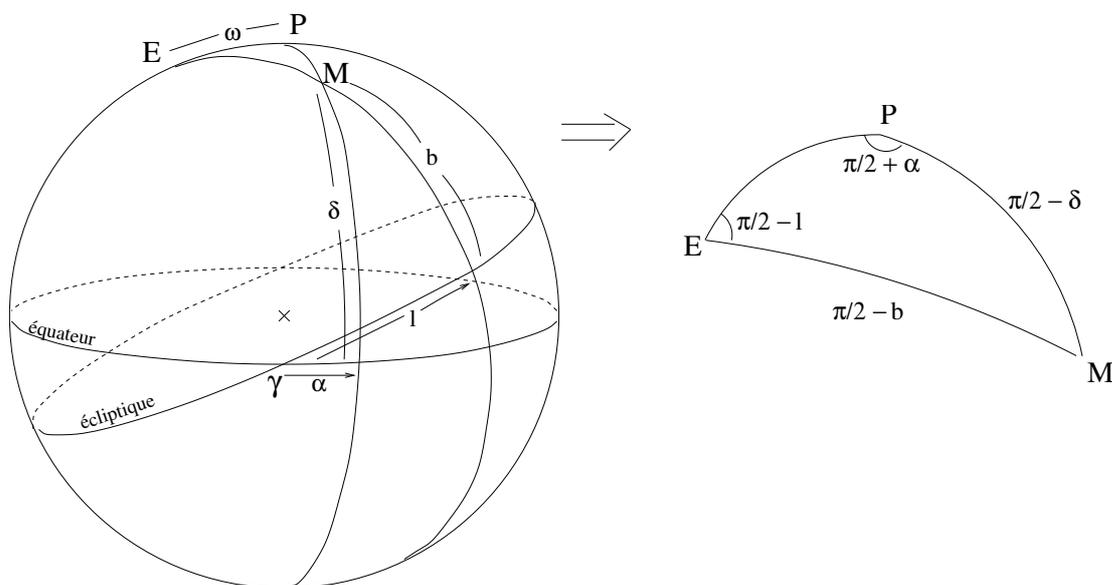


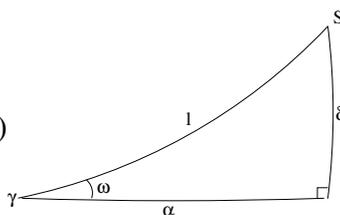
FIG. 4.1 – Coordonnées équatoriales et écliptiques

l = longitude céleste

b = latitude céleste

La figure (4.1) permettrait d'écrire, comme précédemment, les formules de changements de coordonnées. Il n'est pas utile ici de le faire. Ecrivons seulement ces formules dans le cas du Soleil, c'est à dire le cas où $b = 0$. On a :

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin \omega \sin l \\ \tan \alpha &= \cos \omega \tan l \end{aligned} \quad (4.1)$$



4.2 Première approximation :

mouvement uniforme du Soleil en ascension droite

Cette "hypothèse" serait exacte si $e = 0$ (en fait $e = 0,0167$) et si $\omega = 0$! Cette approximation grossière a été utilisée en France jusqu'en 1816 pour l'établissement des échelles de temps. Ces échelles de temps sont matérialisées par les cadrans solaires.

On suppose donc que :

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = 1 \text{ tour par an (=Cst)} = \frac{1}{366,2} \text{ tour par jour sidéral}$$

, et puisque en (2.5) on a vu que $H = \theta - \alpha$:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{d\theta} &= 1 - \frac{d\alpha}{d\theta} \\ &= 1 - \frac{1}{366,2} \\ &= \frac{365,2}{366,2} \text{ tour par jour sidéral} \end{aligned}$$

On définit le jour solaire par $\frac{dH}{dt} = 1$ tour par jour solaire.

On a donc

$$\begin{aligned} 366,2 \text{ jours sidéraux} &= 365,2 \text{ jours solaires} = 1 \text{ an} \\ 1 \text{ jour solaire} &= 1 \text{ j } 0 \text{ h } 3 \text{ mn } 56,6 \text{ s de temps sidéral} \\ 1 \text{ jour sidéral} &= 23 \text{ h } 56 \text{ mn } 4,1 \text{ s de temps solaire} \end{aligned}$$

On définit aussi le temps solaire local par :

$$t = H_{\odot} \pm 12 \text{ h} \quad (4.2)$$

Il est ainsi 12h quand le Soleil est au méridien.

Comme pour le temps sidéral, les temps solaires de deux lieux A et B de longitudes terrestres respectives L_A et L_B sont reliés par :

$$t_B - t_A = L_B - L_A \quad (4.3)$$

4.3 Equation du temps :

mouvement “réel” du Soleil

Le mouvement du Soleil n'est pas uniforme le long de l'écliptique puisque l'orbite de la Terre a une excentricité de 0,0167. De plus, si on “lit” l'heure par l'ascension droite, il faut tenir compte de l'obliquité. Pour ces deux raisons, le mouvement du Soleil n'est

pas uniforme en α . C'est l'écart au mouvement uniforme qui sera appelé l'"équation du temps".

4.3.1 partie due à l'excentricité

Le mouvement du Soleil dans le plan de l'écliptique suit la loi des aires. Celle-ci est donnée par les formules vues au chapitre 3 que nous rappelons ici :

$$\begin{aligned} M &= E - e \sin E & M &= \frac{2\pi}{T}(\theta - \theta_0) \\ \tan \frac{W}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} & \theta_0 &\approx 4 \text{ janvier} \\ l &= \varpi + W & \varpi &= 282^\circ 56' \end{aligned}$$

θ_0 représente l'instant de passage au péricentre et ϖ la longitude du péricentre. Ainsi l est bien la longitude du Soleil comptée sur l'écliptique à partir du point γ .

Calculons W en fonction de M à l'ordre 1 par rapport à e :

$$W = M + (W - E) + (E - M)$$

Or

$$E - M = e \sin E \simeq e \sin M$$

Par ailleurs, $W - E$ se calcule par $\tan \frac{W}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$ qui est une formule de la forme $\tan u = (1 + \varepsilon) \tan v$, car

$$\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \simeq \sqrt{(1+e)(1+e)} = 1 + e$$

Développons $\tan u$ au voisinage de v :

$$\tan u \simeq \tan v + \frac{1}{\cos^2 v}(u - v)$$

, ainsi

$$\tan u - \tan v = \varepsilon \tan v \simeq \frac{u - v}{\cos^2 v} \quad \text{c'est à dire} \quad u - v \simeq \varepsilon \sin v \cos v$$

On en tire le petit lemme suivant :

L'expression $\tan u = (1 + \varepsilon) \tan v$ s'exprime approximativement (à l'ordre 1 en ε) par $u - v = \frac{\varepsilon}{2} \sin 2v$.

On en déduit ici :

$$\frac{W}{2} - \frac{E}{2} \simeq \frac{e}{2} \sin 2\frac{E}{2} \quad \text{c.a.d.} \quad W - E \simeq e \sin E \simeq e \sin M$$

, d'où finalement :

$$\begin{aligned} W &= M + (W - E) + (E - M) \\ &= M + 2e \sin M \end{aligned}$$

La longitude du Soleil s'écrit ainsi :

$$\underline{l = \varpi + M + 2e \sin M} \quad (4.4)$$

avec

$$\varpi = 282^\circ 56', \quad e = 0,0167, \quad M = \frac{2\pi}{T}(\theta - \theta_0) \quad \text{et} \quad \theta_0 \approx 4 \text{ janvier}$$

application à la durée des saisons

L'équinoxe de printemps correspond à $l = 0^\circ$, il faut donc résoudre (numériquement) :

$$0^\circ = 282^\circ 56' + M + 115' \sin M$$

On trouve $M = 75^\circ 13' = 0,2089$ tour, d'où $\theta - \theta_0 = 0,2089$ an = 76,3 jours solaires (moyens). On en déduit encore que $\theta = 4$ janvier + 76,3 jours = 80,3 janvier = 49,3 février = 21,1 mars.

De même, en faisant $l = 90^\circ$ (solstice d'été), $l = 180^\circ$ (équinoxe d'automne) et $l = 270^\circ$ (solstice d'hiver), on trouve :

| | début de la saison | | durée (jours) |
|-----------|--------------------|-----------|---------------|
| printemps | 21,1 | mars | 92,7 |
| été | 21,8 | juin | 93,7 |
| automne | 23,5 | septembre | 89,8 |
| hiver | 22,3 | décembre | 89,0 |

4.3.2 partie due à l'obliquité

Pour avoir maintenant l'ascension droite du Soleil, il faut utiliser la relation

$$\tan \alpha = \cos \omega \tan l$$

, ω étant l'obliquité et vaut $23^\circ 26'$. Puisque $\cos \omega = 0,918$, on peut dire que $\tan \alpha$ et $\tan l$ sont peu différents (à 8% près). Grâce au petit lemme précédent, on peut approcher la relation par

$$\alpha - l = \frac{-\omega^2/2}{2} \sin 2l$$

Si l'obliquité n'apparaît pas petite, la quantité $-\frac{\omega^2}{4}$ l'est puisqu'elle vaut $-0,0418$, soit $-144''$. Un développement plus correct donnera la valeur de $148''$. On écrit ainsi

$$\alpha = l - 148'' \sin 2l \quad (4.5)$$

4.3.3 Equation du temps

Les deux expressions (4.4) et (4.5) que l'on vient de voir sont en fait le début du développement en série de Fourier de :

$$\begin{aligned} l - \varpi - M & \text{ en série de } M \\ \alpha - l & \text{ en série de } l \end{aligned}$$

On pourrait donc poursuivre pour affiner les formules. On s'y prendrait toutefois autrement, en introduisant notamment les fonctions de Bessel. Les formules trouvées ici suffisent pour assurer une précision de $1''$. On a :

$$\begin{aligned} E &= 115'' \sin M - 148'' \sin 2l \\ &= 460'' \sin M - 592'' \sin 2l \end{aligned} \quad (4.6)$$

avec

$$\alpha = \varpi + M + E = \alpha_m + E$$

¹Il peut paraître surprenant de voir que l'effet de l'obliquité est du même ordre de grandeur que l'effet de l'excentricité.

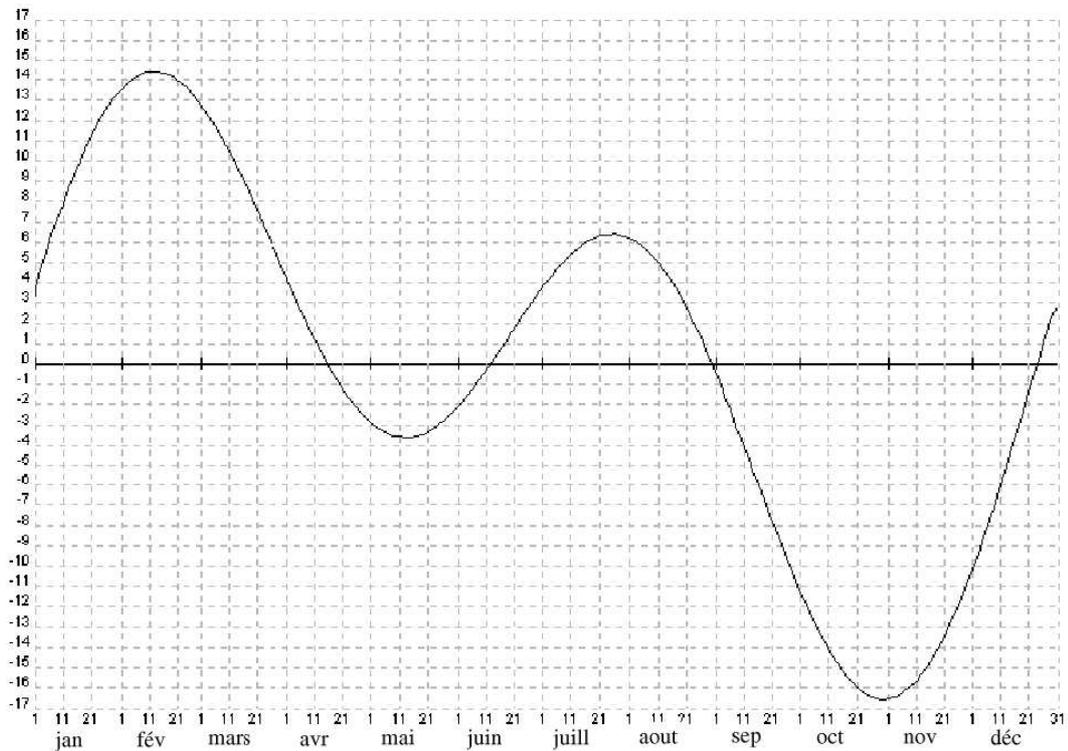


FIG. 4.2 – Equation du temps (en minutes) pour 2003 (réalisé avec le logiciel “Shadow 1.5.4”)

où α_m est la partie linéaire de α . De cette manière l’angle horaire du Soleil s’écrit

$$\begin{aligned} H &= (\theta - \alpha) \\ &= (\theta - \alpha_m) - E \end{aligned}$$

, soit encore

$$H = H_m - E$$

L’expression de E est appelée “équation du temps” et elle est représentée pour 2003 sur la figure (4.2).

Les notions introduites dans la section (4.2) restent vraies si on ajoute le qualificatif moyen.



FIG. 4.3 – Courbe en 8 montrant l’effet de l’équation du temps dans le ciel de Crimée (V. Rumyantsev/observatoire de Naucsny). On a superposé des images du Soleil prises de 10 jours en 10 jours le matin à la même heure

Le temps solaire moyen local est :

$$t = H_m \pm 12 h \quad (4.7)$$

Le jour solaire moyen est tel que $\frac{dH_m}{dt} = 1$ tour par jour solaire moyen.

Les autres sont qualifiées de vraies : Le temps solaire vrai local est $H \pm 12h$. Le terme de “temps” est ici impropre car il ne peut s’identifier au temps newtonien (celui que l’on utilise dans les équations de la mécanique). C’est pourtant ce “temps” qui est donné par les cadrans solaires.

Le temps newtonien est accessible par le temps solaire moyen.

Enfin, le temps solaire moyen local de Greenwich est appelé Temps Universel (TU ou UT pour Universal Time).

En superposant des images du Soleil prises de 10 jours en 10 jours à la même heure, on

devine une courbe en 8. Si cette photo est faite vers midi l'axe du 8 est vertical sinon celui-ci est incliné comme sur la photo de la figure (4.3). L'axe de symétrie du 8 correspond aux variations en déclinaisons et l'axe perpendiculaire (donc suivant l'équateur céleste) représente les écarts dus à l'équation du temps.

Cette courbe en 8, appelée aussi analemne, est quelques fois dessinée sur les cadrans solaires. Cela permet d'effectuer, directement à la lecture, la correction due à l'équation du temps.

Quand E est maximum ou minimum, l'heure donnée par un cadran solaire est erronée (l'erreur atteint plus de 16 minutes le 31 octobre) mais la marche du cadran est juste puisque $\frac{dE}{dt} = 0$ pour ces dates. Inversement aux points d'inflexion $\frac{dE}{dt}$ est extrémum. Par exemple le 22 décembre, $\frac{dE}{dt} = 3,2 \cdot 10^{-4}$ et donc le jour solaire vrai à cette date est 24h 0mn 28s.

4.4 Précession

Jusqu'à maintenant, on a supposé que le point γ était fixe. Or, l'action conjuguée de la Lune et du Soleil sur le bourrelet équatorial de la Terre fait que l'axe de rotation de la Terre tourne autour du pôle de l'écliptique à la manière d'une toupie dont l'axe de rotation tourne autour de la verticale (figure 4.4).

L'axe de rotation de la Terre parcourt le cercle de précession en 26 000 ans . Ainsi le point γ ou point vernal dont la longitude est 0 par définition se déplace parmi les étoiles. Ce mouvement est appelé précession des équinoxes (précession car il se déplace en sens inverse du Soleil). Le point γ tourne donc sur l'écliptique à raison de 1 tour en 26 000 ans (25 778 ans plus exactement).

Le temps que met la longitude du Soleil pour augmenter de 360° est l'année tropique qui est égale à 365,242 198 79 jours solaires moyens. Or partant du point vernal γ_1 d'une année et arrivant au point γ_2 de l'autre année, le Soleil doit encore parcourir l'arc $\widehat{\gamma_1\gamma_2} = \frac{1}{25778}$ tour = 50," 275. Le temps mis pour faire un tour complet sur l'écliptique est donc plus long, c'est l'année sidérale.

Calendrier grégorien

Ce calendrier est universellement reconnu.² Il est basé sur l'année tropique afin que l'année civile soit calée sur le rythme des saisons.

En 46 avant JC, Jules César fixait l'équinoxe de printemps au 25 mars et imposait le système des années bissextiles : 3 années communes de 365 jours sont suivies d'une année bissextile de 366 jours (celle dont le millésime est divisible par 4). Ainsi la durée moyenne de l'année dite julienne vaut 365,25 jours. L'écart avec l'année tropique est donc de 0,0078 jour (par an).

En 1582 le calendrier julien ayant pris de l'avance sur les saisons, le printemps tombait le 11 mars. C'est pourquoi le Pape Grégoire XIII décréta que le jeudi 4 octobre 1582 serait suivi du vendredi 15 octobre. Il ne supprima donc que 10 jours afin que le printemps soit le 21 mars (pour respecter les choix du Concile de Nicée relatif à Pâques qui ne doit pas être fêté à la nouvelle lune). Mais surtout, il décréta une diminution de l'année civile de 0,0075 jour : les années séculaires rondes ne sont bissextiles que si le nombre des centaines est divisible par 4. Ainsi, les années 1700, 1800, 1900 sont communes alors que l'année 2000 est bissextile. La durée moyenne de l'année civile est maintenant de $365 + 1/4 - 3/400 = 365,2425$ jours, la différence avec l'année tropique n'est plus que de 0,0003 jour. Cette différence ne sera visible que dans environ 3000 ans (décalage de 1 jour).

Le calendrier grégorien a été adopté immédiatement en Italie, Espagne et Portugal. En France, c'est le roi Henri III qui décréta la suppression de 10 jours la même année, le dimanche 9 décembre 1582 étant suivi du lundi 20 décembre. Les anglais passèrent du calendrier julien au calendrier grégorien en 1752 (le lendemain du mercredi 2 septembre 1752 étant le jeudi 14 septembre³). Les autres pays n'ont adopté le calendrier grégorien que plus tard : le Japon en 1873, la Bulgarie et l'Albanie en 1912, la Russie en 1918⁴, la Chine en 1912, la Roumanie et la Yougoslavie en 1919, la Grèce en 1923, la Turquie en 1926.

²Les autres calendriers sont éventuellement utilisés en parallèle pour organiser diverses traditions culturelles ou religieuses.

³Cela provoqua quelques émeutes car la population pensait que le gouvernement essayait de leur voler onze jours de salaire.

⁴Ce qui explique que les commémorations de la révolution d'octobre 1917 sur la place rouge se faisaient, du temps de l'Union Soviétique, en novembre.

Chapitre 5

La Terre

Au chapitre 2, nous avons défini divers systèmes coordonnées sur la sphère céleste. Les coordonnées horaires et équatoriales utilisent la constatation du mouvement diurne, c'est-à-dire du mouvement de rotation uniforme de la sphère des fixes autour du pôle céleste nord (Fig :.2.2). Il n'était nullement nécessaire, à ce stade du cours, d'interpréter ce mouvement comme étant issu du mouvement de rotation de la Terre sur elle-même. Nous l'avons cependant fait en Sect. 2.4 (latitude terrestre) et en Sect. 2.6 (longitude terrestre), afin de permettre de faire des exercices d'application issus de la vie courante. Le but de ce chapitre est de définir précisément les coordonnées terrestres et, bien sûr, de voir les liens avec l'astronomie.

5.1 Représentation astronomique de la Terre

Définition : La figure **sphérique** formée par les zéniths de tous les lieux de la Terre est appelée **Globe Terrestre**.

En effet, la verticale ascendante d'un lieu situé à la surface de la Terre est représentable par un point de la sphère céleste que nous avons appelé zénith. Or il n'existe pas pas, à la surface de la Terre, deux lieux qui aient des verticales parallèles et de même sens (injectivité)¹. Il existe toujours un lieu dont la verticale ait une direction et un sens donné (surjectivité). Il y a donc bijection entre les points de la surface de la Terre et les points sur la sphère céleste. Ainsi, un système de coordonnées permettant de repérer le zénith d'un

¹Cette affirmation est évidente si la Terre est supposée sphérique et de répartition de masse uniforme. Ca l'est encore, si on considère la Terre comme une ellipsoïde. Pour les cas plus fins, cette affirmation est moins évidente mais elle est quand même facile à concevoir tant que les lieux considérés ne sont pas trop proches.

lieu sur la sphère céleste permettra en même temps de repérer ce lieu sur la Terre.

On a rappelé que le mouvement diurne est le mouvement relatif de la sphère des fixes par rapport à la sphère locale. Donc, le zénith d'un lieu subit, relativement à la sphère des fixes, un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des pôles PP' , dans le sens direct, à la vitesse de un tour par jour sidéral. Par ailleurs, on observe que les zéniths de tous les lieux de la Terre sont animés de ce même mouvement. On en déduit que le Globe Terrestre constitue une figure indéformable. On peut donc y reporter des points représentatifs (villes, monuments, sommets de montagne, ...) ou des lignes remarquables (fleuves, frontières, ...). Une telle représentation n'est pas semblable à la Terre (car la Terre n'est pas sphérique). C'est une représentation de la Terre au sens géométrique du terme. Comme la Terre est quand même approximativement une sphère, sa représentation par le Globe Terrestre lui est approximativement semblable. Dans les applications courantes de la Géographie, on admet cette approximation. C'est d'ailleurs ce que nous avons fait dans l'interprétation du mouvement diurne au Chapitre 2.

Représentations planes du Globe Terrestre

On peut définir une application du Globe Terrestre sur un plan, ce qui constitue une **carte** géographique. Les cartes marines sont ainsi construites. Il y a 2 raisons à cela : d'abord, elles permettent le tracé en toute rigueur des droites de hauteur (voir Sect. 5.5), et ensuite les points (sur l'Océan) que l'on y porte ne sont connus que par leur coordonnées astronomique (voir Sect. 5.4). Ce sont des **cartes en représentation astronomique**.

Pour les régions continentales dont la topographie est bien étudiée, il existe des cartes dont les points de la surface terrestre sont représentés d'après leurs positions relatives réelles. Ce sont des cartes géodésiques (celles de I.G.N. par exemple).

Projection stéréographique

Il y a autant de cartes astronomiques possibles qu'il y a d'applications de la sphère sur un plan. Un exemple intéressant est la **projection stéréographique**.

Soit S le point de la Terre dont son zénith est P' (appelé pôle géographique sud). Soit (Π) un plan parallèle au plan équatorial. Soit M un point de la Terre différent de S . On appelle image de M par la projection stéréographique sur (Π) à partir de S , le point M' intersection de la droite (SM) et du plan (Π) .

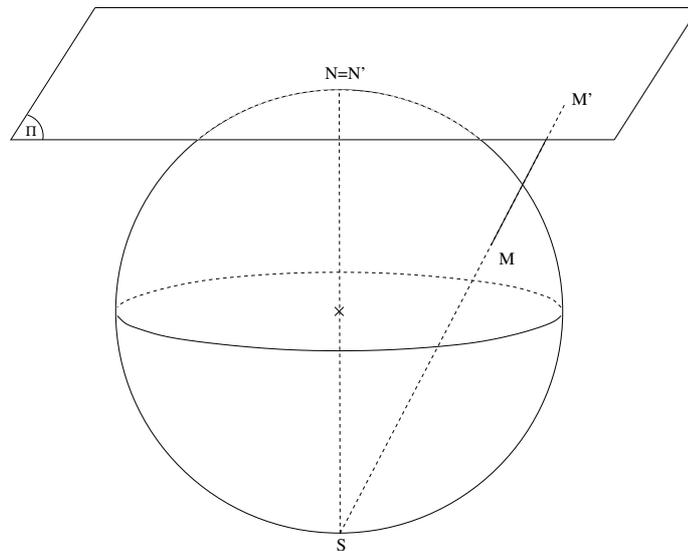


FIG. 5.1 – Projection stéréographique. Le plan Π est ici “posé” au pôle nord géographique N .

Propriétés et remarques

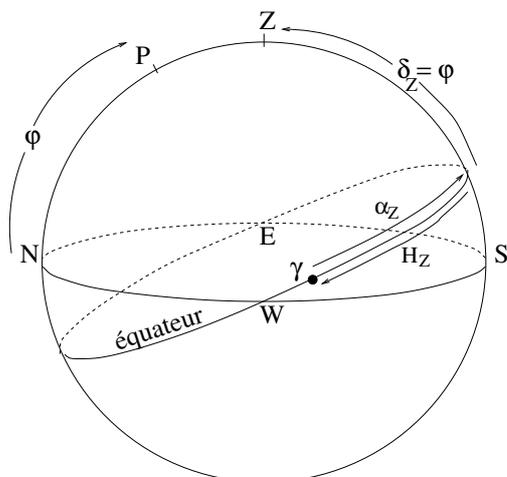
1. Le point S n’a pas d’image par cette projection. Il est d’ailleurs rejeté à l’infini *dans toutes les directions* du plan (en fait suivant le méridien pour lequel le point M tend vers S).
2. Tout cercle de la sphère a pour image un autre cercle (du plan (Π))
3. La projection stéréographique conserve les angles
4. Dans le cas où le plan (Π) est le plan de l’équateur,
 - L’équateur est invariant pendant la transformation
 - Un point de l’hémisphère nord a pour image un point à l’intérieur de l’équateur
 - Un point de l’hémisphère sud a pour image un point à l’extérieur de l’équateur
5. La projection stéréographique revient à observer la sphère depuis S .

Les démonstrations de ces propriétés sont faciles sauf peut-être la troisième. Elles utilisent toutes la géométrie élémentaire. Elles sont laissées en exercice.

5.2 Coordonnées astronomiques d'un lieu.

Coordonnées sur la sphère des fixes

Le point Z en tant que point sur la sphère céleste peut être repéré par l'un des systèmes de coordonnées déjà connus : par exemple les coordonnées équatoriales α_Z et δ_Z . Ces deux coordonnées sont définies sur la sphère des fixes. Or le point Z n'est pas fixe sur cette sphère, donc, au moins l'une des deux coordonnées est variable dans le temps.



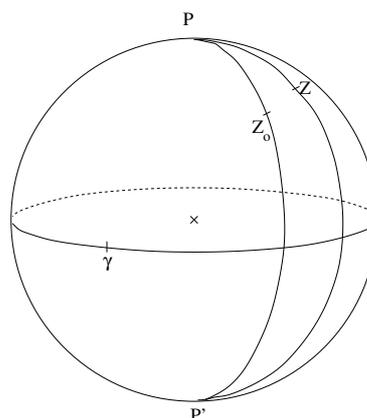
La déclinaison de Z s'identifie avec la latitude du lieu que nous avons déjà introduite. Elle est invariable avec le temps. Par contre ce n'est pas le cas de son ascension droite α_Z . Cet angle est $(P\gamma, PZ)$ compté positivement dans le sens direct. Il est égal à l'angle $(PZ, P\gamma)$ compté positivement dans le sens rétrograde.

On reconnaît ainsi l'angle horaire du point γ qui est égal au temps sidéral du lieu Z :

$$\alpha_Z = H_Z(\gamma) = \theta \quad (5.1)$$

Coordonnées invariables

Pour obtenir pour les points Z (ou équivalamment des points de la surface terrestre) des coordonnées invariables, nous devons rapporter ces points à un repère lié au Globe Terrestre (donc tournant dans le sens direct par rapport à la sphère des fixes). Le système de coordonnées astronomiques du point Z est ainsi défini :



- Le pôle est le pôle nord céleste P .
- Le demi-cercle origine est le demi cercle PZ_0P' passant par le zénith Z_0 d'un point particulier sur la Terre (Observatoire de Greenwich).
- Le sens choisi est le sens direct.

- Le demi-cercle PZP' passant par le zénith Z du lieu est appelé le méridien de ce lieu².
- La première coordonnée, L , est appelée **longitude astronomique**. C'est l'angle (PZ_0P', PZP') . Il est compté de -180° à $+180^\circ$ ou de $-12h$ à $+12h$. On dit que la longitude est Est lorsqu'elle est positive (Ouest lorsqu'elle est négative).
- La deuxième coordonnée, φ , est le complément à $\frac{\pi}{2}$ de la distance PZ . Elle est appelée **latitude astronomique**.
- Les lignes d'égales coordonnées sont appelées respectivement les méridiens et les parallèles.

5.3 Relation entre longitude et temps sidéral local

On considère, à un instant donné, le zénith Z_0 de Greenwich, Z celui d'un lieu quelconque. Par la relation de Chasles, on a :

$$(PZP', PZ_0P') = (PZP', P\gamma P') + (P\gamma P', PZ_0P')$$

où γ est l'origine des coordonnées équatoriales sur la sphère des fixes.

Comptons positivement ces 3 angles pris dans le sens rétrograde.

- $(PZP', PZ_0P') = L$. En effet, on vient de voir dans la section précédente que (PZ_0P', PZP') est la longitude lorsque le sens direct est choisi.
- $(PZP', P\gamma P') = \theta$. C'est la définition même de l'angle horaire pour un lieu Z . De plus, l'angle horaire est bien compté positivement dans le sens rétrograde. Comme il s'agit du point γ , c'est l'angle horaire du point γ pour le lieu Z , c'est-à-dire le temps sidéral local du lieu.
- $(P\gamma P', PZ_0P') = -\theta_0$, puisque de même $(PZ_0P', P\gamma P')$ est le temps sidéral du lieu Z_0 .

On a ainsi

$$L = \theta - \theta_0 \tag{5.2}$$

Cette relation montre que les temps sidéraux de deux lieux diffèrent d'une quantité constante égale à la différence des longitudes.

L'horloge du lieu Z retarde sur celle de Greenwich si sa longitude est ouest ($L < 0$). Elle avance sur celle de Greenwich dans la cas contraire.

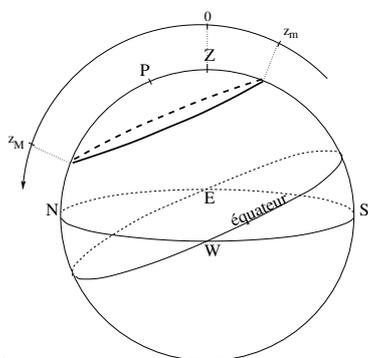
²Exemple : le méridien de Paris qui est matérialisé régulièrement par des disques en bronze dans la ville (Observatoire, Eglise St Sulpice, ...)

5.4 Mesure précise des coordonnées d'un lieu

Latitude

Pour avoir la latitude, il suffit de mesurer la hauteur du pôle céleste nord. La méthode la plus classique utilise l'instrument méridien. Le principe est de mesurer les distances zénithales z_m et z_M d'une même étoile lors de ces culminations et d'en prendre la moyenne :

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{z_m + z_M}{2} \quad (5.3)$$



Pour pouvoir utiliser cette formule même dans le cas où la culmination supérieure se situe au delà du zénith, il suffit que les distances zénithales soient des distances algébriques.

Longitude

Pour la longitude, il suffit de faire la différence des indications données, à un même instant, par deux horloges réglées selon les temps sidéraux des lieux Z_0 et Z . Le réglage d'une horloge en temps sidéral local se fait aussi au moyen de l'instrument méridien.

La comparaison de deux horloges situées en des lieux éloignés n'offre actuellement pas de difficulté grâce aux moyens de transmission. On peut considérer que le temps sidéral local de Greenwich est diffusé en permanence. En réalité, il s'agit du temps universel qui est diffusé, mais on sait comment se déduisent ces deux temps l'un de l'autre.

Avant l'utilisation des moyens de transmission moderne, les déterminations de longitudes faisaient intervenir des moyens délicats et imprécis de comparaisons à distance de deux horloges : signaux optique, transport de chronomètres. Depuis l'invention des horloges atomiques facilement transportable, la méthode de transport d'horloge reprend toute sa valeur.

Pour s'affranchir du transport d'horloge, il ne reste que des moyens astronomiques pour déterminer l'heure. Ce sont alors les positions d'astres de mouvement plus ou moins rapides qu'il faut utiliser (Soleil, Lune, planètes, satellites de Jupiter, ...). Les tables qui donnent ces positions sont appelées **éphémérides**, elles sont publiées en France par l'Ins-

titut de Mécanique Céleste et de Calcul des Ephémérides” (IMCCE). Historiquement, cette publication se fait sous la responsabilité du “Bureau des Longitudes”, et la publication correspondante s’intitule “Connaissance des Temps”. A l’époque de la création du Bureau des Longitudes, connaître les longitudes partout sur la Terre permet de contrôler les océans. Le 7 messidor an III (25 juin 1795), une loi de la Convention Nationale fixe le rôle du Bureau des Longitudes : publier “un annuaire propre à régler ceux de la République”. On pourra consulter <http://www.imcce.fr>

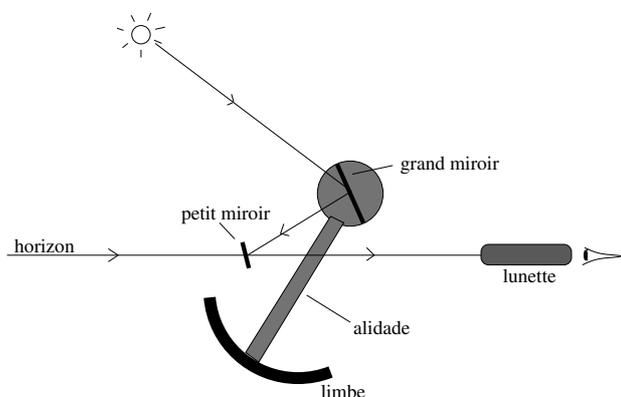
5.5 Le point en mer : droites de hauteur

Loin des continents et des repères visuels ou radio qu’ils procurent, on déterminait autrefois le **point** où l’on se trouvait par des moyens simples et moins précis. On ne faisait intervenir que des mesures de hauteur d’astres au moyen du sextant. Cette technique est toujours utilisée dans les cas où les moyens modernes de navigation sont indisponibles ou inefficaces. A l’heure du GPS, les méthodes de l’astronomie nautique ne sont pas révolues. Evidemment, en termes de précision et de commodité les progrès apportés par ce type de système sont considérables. Cependant, ces systèmes hautement sophistiqués ont pour contrepartie une grande dépendance envers les prestataires de service³ (en temps de crise ou de conflit, par exemple) ou envers des causes plus banales comme les pannes (système, pile défectueuse, ...). D’ailleurs le sextant et les tables astronomiques adaptées (comme les “Ephémérides Nautiques” publiées par l’IMCCE) sont obligatoires pour les navires en haute mer.

Le sextant

Le sextant est un instrument qui mesure l’angle entre l’horizon et un astre. Le principe est de voir en superposition, deux images provenant de deux directions différentes et de mesurer ainsi l’angle entre ces deux directions. Si l’instrument est tenu verticalement, cet angle est la hauteur de l’astre.

³Le système européen GALIEO sera lui aussi un système de positionnement par satellite. Il devrait en partie remédier à ce problème de dépendance à un unique prestataire de service. En ce sens le lancement du système GALILEO par l’Europe est une décision autant politique que scientifique, tout comme l’a été la création du Bureau des Longitudes. Il s’agit, dans les deux cas, de contrôler l’espace (terrestre, maritime ou aérien).



La *lunette* est alignée avec le *petit miroir* qui est solidaire de l'instrument. Ce miroir est à moitié transparent. Ainsi, l'observateur peut voir l'horizon à travers. Ce petit miroir réfléchit aussi l'image provenant du *grand miroir*. Ce grand miroir est mobile et s'oriente grâce à l'*alidade*. L'observateur vise ainsi l'astre et le positionne sur l'horizon. La position de l'*alidade* sur le *limbe* permet de lire l'angle recherché.

Le point

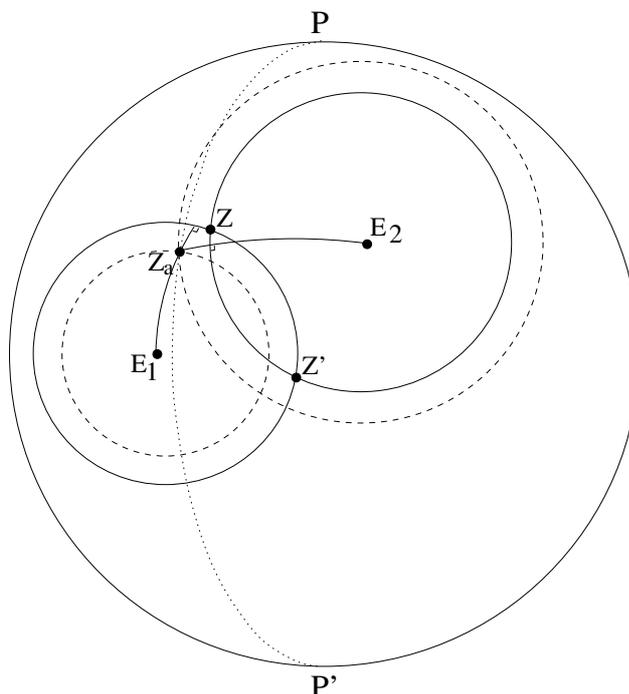
Mesurons la distance zénithale z_1 d'une étoile E_1 , à un instant donné. Sur la sphère des fixes, on porte l'étoile E_1 par ses coordonnées équatoriales α_1 et δ_1 . On trace ensuite (sur cette sphère) le cercle de centre E_1 et de rayon z_1 . Ce petit cercle est appelé **cercle de hauteur**. C'est le lieu géométrique des positions possibles du zénith Z du lieu considéré.

Mesurons, au même instant, la distance zénithale z_2 d'une deuxième étoile E_2 . On construit de la même manière un second cercle de hauteur. Ces deux cercles se coupent au point Z représentatif du lieu, ainsi qu'en un autre point Z' , symétrique de Z par rapport à E_1E_2 . La mesure des deux distances zénithales permet donc, de déterminer (graphiquement ou par le calcul) deux points Z et Z' parmi lesquels se trouve le zénith recherché (voir Fig.5.2). On pourra choisir entre ces deux points, généralement fort éloignés, si l'on connaît de façon approximative la région de la Terre où l'on se trouve.

Remarque : la méthode ne dispense pas de connaître le temps sidéral de Greenwich θ_0 . En effet, par la méthode précédente, on connaît la position du zénith sur la sphère des fixes mais dans le système de coordonnées équatoriales. Or, l'origine des longitudes sur une carte n'est évidemment pas celle des coordonnées équatoriales (car il y a le mouvement diurne entre les deux). La connaissance de θ_0 permet justement de déterminer l'origine des longitudes.

Droites de hauteurs

La détermination par le calcul de l'intersection de deux cercles ne pose pas de réel problème. Mais en mer on se contente habituellement de construire le point Z sur une carte. Cette carte représentant une petite partie du globe terrestre, le point s'obtient par

FIG. 5.2 – Tracé des cercles de hauteur des étoiles E_1 et E_2 .

l'intersection de deux petites portions des cercles de hauteur assimilables à des droites dites **droites de hauteur**. Ces droites étant les tangentes en un point donné des cercles de hauteur, il est nécessaire de positionner au préalable ce point, c'est-à-dire de connaître approximativement le point d'intersection recherché.

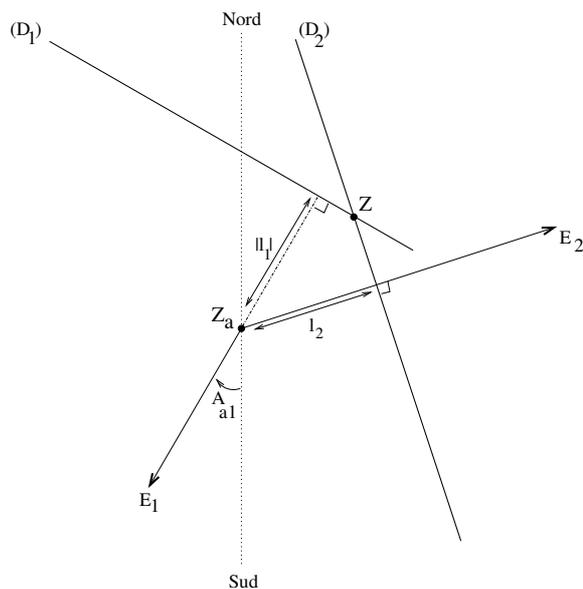
Dans les explications qui suivent, la Figure (5.2) ne constitue pas le tracé du point en mer proprement dit. Cette figure n'est donnée qu'à titre explicatif pour mieux comprendre la Figure (5.3) qui correspond elle, au tracé des droites de hauteur que les marins font sur leur carte.

Soit Z_a une position approchée du lieu, en fixant par exemple sa longitude et sa latitude est des valeurs rondes

$$L_a \quad \text{et} \quad \varphi_a$$

On connaît l'instant θ_0 de l'observation en temps sidéral de Greenwich. Le temps sidéral local du lieu Z_a est donc

$$\theta_a = \theta_0 + L_a$$

FIG. 5.3 – Tracé des droites de hauteurs des étoiles E_1 et E_2

Par l'ascension droite α_1 de l'étoile E_1 , on calcule son angle horaire :

$$H_{a1} = \theta_a - \alpha_1 = \theta_0 + L_a - \alpha_1$$

On a ainsi les coordonnées horaires de E_1 ,

$$(H_{a1}, \delta_1)$$

, dans le système du lieu Z_a . On en déduit, par les formules de changements de coordonnées (2.3) et avec φ_a , les coordonnées horizontales

$$(A_{a1}, h_{a1}) \quad \text{ou} \quad (A_{a1}, z_{a1})$$

Ce sont les coordonnées horizontales de E_1 pour le lieu Z_a .

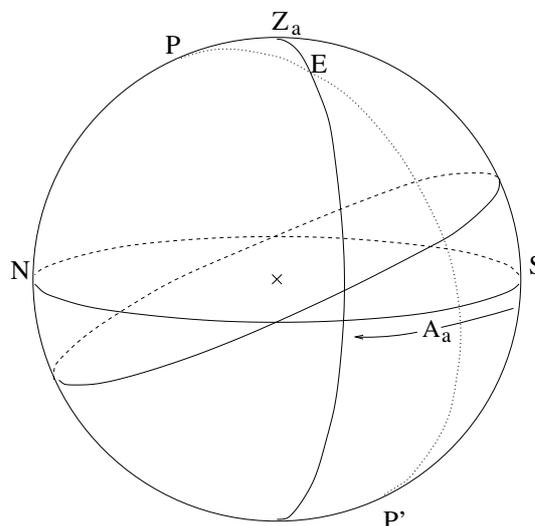
Avec cette valeur de z_{a1} , on peut tracer le cercle de hauteur correspondant ; ce qui est fait en pointillé sur la Figure (5.2). En fait l'observateur, au lieu Z où il se trouve, a mesuré la distance zénithale z_1 . Cette mesure correspond au cercle en trait plein de la Figure (5.2).

On note l_1 la longueur algébrique suivante, appelée **intercept** :

$$l_1 = z_{a1} - z_1 \tag{5.4}$$

Pour les deux étoiles prises en exemple dans les Figures (5.2) et (5.3), l_1 est négatif et l_2 est positif. Leur valeur numérique est petite puisque Z est proche de Z_a . Dans la pratique du point en mer, l'intercept ne dépasse pas quelques dizaines de minutes de degré.

Sur la sphère céleste, l'angle $(P'Z_aE_1)$ correspond à l'azimut A_{a1} de l'étoile E_1 . C'est ce que rappelle la figure ci-contre. Attention, ne pas oublier que l'azimut est compté dans le sens rétrograde.



La construction sur une carte marine se fait alors de la manière décrite ci-après. Cette carte est à considérer comme le plan tangent de la sphère de la Figure (5.2) au voisinage de Z_a . La construction est faite à la Figure (5.3).

- On se munit une carte de la région concernée, où figure au moins l'échelle de la carte (la longueur qu'occupe un arc de $1'$ de la sphère céleste), son orientation (la direction Nord-Sud) et les lignes coordonnées du globe terrestre (ou tout autre repère terrestre).
- On positionne Z_a
- On trace la demi-droite $[Z_aE_1)$ grâce à l'azimut $A_{a1} = \widehat{P'Z_aE_1}$. Le point P' n'est pas sur cette carte (tout comme E_1) mais sa direction par rapport à Z_a est celle du Sud.
- La droite (Z_aE_1) est perpendiculaire à la (cercle)droite de hauteur cherchée. La première droite de hauteur D_1 est positionnée à la distance l_1 de Z_a .
- La deuxième droite de hauteur D_2 est positionnée de la même façon grâce à A_{a2} et l_2 (par une observation de l'étoile E_2 faite au même instant θ_0).
- Le point Z cherché est l'intersection de D_1 et de D_2 . Si le canevas des coordonnées L et φ figure sur la carte, une simple lecture sur les échelles de la carte donne les valeurs de L et de φ cherchées.

Pour positionner la droite de hauteur avec la valeur de l du bon côté de Z_a , il faut se rappeler la définition de l'intercept (5.4). Elle indique que la droite est du côté de l'étoile E . Ainsi, pour la Figure (5.3), D_1 est du côté opposé à E_1 ($l_1 < 0$) et D_2 est du côté de E_2

($l_2 > 0$).

A titre de vérification, les navigateurs construisent habituellement une troisième droite de hauteur. Elle doit concourir avec les deux premières aux erreurs de mesures sur z_1 et z_2 . La précision obtenue est de 0,5 à 1' en navigation maritime et de plusieurs minutes de degré en navigation aérienne.

5.6 Un illustration littéraire

Les romans d'aventure avec des voyages au long cours abondent d'exemples d'utilisation et de mesure des coordonnées terrestres. Nous avons choisi ici, un exemple tiré du roman de Jules Verne "Vingt mille lieues sous les mers"^{4, 5}

Le capitaine Némo, muni de son sextant, prit la hauteur du Soleil, qui devait lui donner sa latitude. Il attendit pendant quelques minutes que l'astre vint affleurer le bord de l'horizon. Tandis qu'il observait, pas un de ses muscles ne tressaillait, et l'instrument n'eût pas été plus immobile dans une main de marbre.

"Midi, dit-il. Monsieur le professeur, quand vous voudrez ?..."

Je jetais un dernier regard sur cette mer un peu jaunâtre des atterrages japonais, et je redescendis au salon.

Là, le capitaine fit son point et calcula chronométriquement sa longitude, qu'il contrôla par de précédentes observations d'angles horaires. Puis il me dit :

"Monsieur Aronax, nous sommes par cent trente-sept degrés et quinze minutes de longitude à l'ouest ...

- De quel méridien ? demandai-je vivement, espérant que la réponse du capitaine m'indiquerait peut-être sa nationalité.

- Monsieur, me répondit-il, j'ai divers chronomètres réglés sur les méridiens de Paris, de Greenwich et de Washington. Mais, en votre honneur je me servirai de celui de Paris."

⁴Dans ces romans Jules Verne peine à utiliser le système métrique pourtant en vigueur en France. Peut-être est-ce par souci d'internationalisation ? En effet, ses héros sont quelques fois français mais aussi anglais, américains, ... Or la première puissance maritime à cette époque est anglo-saxonne et n'utilise pas le système métrique.

⁵Si on suppose que l'unité utilisée par Jules Verne est "une lieue marine", celle-ci vaut la vingtième partie de degré comptée sur un grand cercle de la Terre (Larousse classique) soit 5,56 km. "Vingt mille lieues sous les mers" correspondrait à "Cent onze mille kilomètres sous les mers". Notez toutefois, que une lieue kilométrique vaut 4 km, une lieue de poste 3898 m et une lieue terrestre 4444 m.

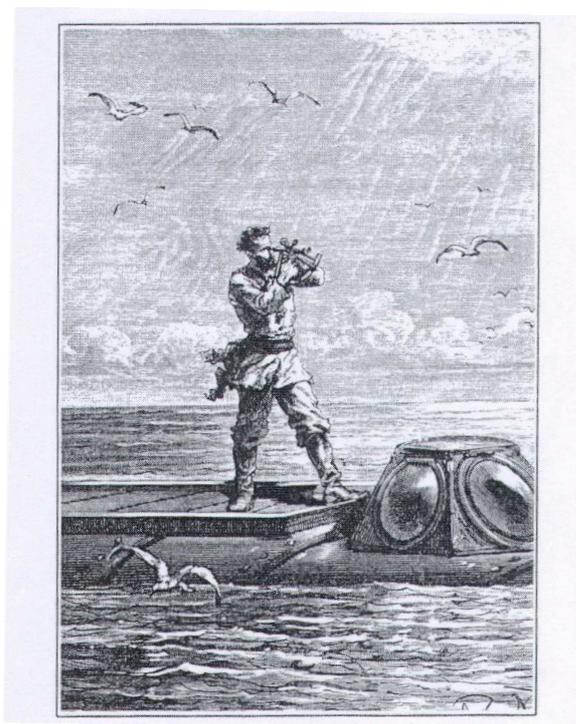


FIG. 5.4 – “Le capitaine Némo prit la hauteur du soleil.” Extrait de “Vingt mille lieues sous les mers” de Jules Verne avec les dessins de Neuville et Riou.

Cette réponse ne m’apprenait rien. Je m’inclinai, et le commandant reprit :

“Trente-sept degrés et quinze minutes de longitude à l’ouest du méridien de Paris, et par trente degrés et sept minutes de latitude nord, c’est-à-dire à trois cents milles⁶ environ des côtes du Japon. C’est aujourd’hui 8 novembre, à midi, que commence notre voyage d’exploration sous les eaux.

- Dieu nous garde ! répondis-je

- Et maintenant, monsieur le professeur, ajouta le capitaine, je vous laisse à vos études. J’ai donné la route à l’est-nord-est par cinquante mètres de profondeur. Voici les cartes à grands points, où vous pourrez la suivre. Le salon est à votre disposition, et je vous demande la permission de me retirer.”

⁶n.m. Mesure itinéraire, qui valait chez les romains mille pas. Il *Mille marin*, unité de longueur correspondant à la distance moyenne de deux points de la surface de la Terre qui ont même longitude et dont les latitudes diffèrent de 1 minute. Sa valeur est fixée conventionnellement à 1852 m. Son emploi est autorisé seulement en navigation aérienne ou maritime. (Larousse classique)

5.7 Figure de la Terre : le Géoïde

Tout ce qui a été dit précédemment ne fait pas intervenir la forme de la Terre (sauf quand même de manière grossièrement qualitative), ni ses dimensions. La détermination de cette forme et de ces dimensions (ou *figure* de la Terre) est l'objet de la **Géodésie**.

La surface du sol tel qu'il se présente à nous (ou surface topographique de la Terre) est fort irrégulière. La détermination de ces irrégularités est l'objet d'une branche de la Géodésie, la **Topographie**. Elle se propose notamment de déterminer, pour tout lieu terrestre, une **altitude** par rapport à une **surface de référence**, d'altitude zéro, appelée le **géoïde**. La définition et la détermination du géoïde constitue l'objet majeur de la géodésie.

Hors des continents, le géoïde est défini comme la surface moyenne des mers, ou surface des mers supposées au repos. Cette surface est partout perpendiculaire à la verticale. Sous les continents, on définit de même le géoïde comme étant une surface perpendiculaire, en chacun de ses points, à la verticale en ce point. Bien qu'approchée, cette définition suffit généralement.

L'existence d'une telle surface résulte de la propriété que présente le champ de pesanteur de dériver d'un potentiel :

Potentiel du champ de gravité

Nous allons déterminer ce potentiel dans l'hypothèse d'une Terre sphérique et pour une rotation uniforme. L'existence de ce potentiel sera admise pour le cas général.

On considère une particule de masse m en un lieu A de latitude φ de la surface terrestre. La Terre est donc supposée sphérique de centre O , de rayon r et de masse M . On note ω sa vitesse angulaire de rotation autour de l'axe des pôles. On note G la constante de gravitation universelle.

Donnons les composantes du poids \vec{P} de la particule par rapport au référentiel terrestre $(Axyz)$ orthonormé direct où (Ax) , situé dans le plan méridien, est dirigé vers le sud et (Ay) dans la direction de \vec{OA} . Les forces d'inertie d'entraînement sont

$$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r \quad \text{où } \vec{v}_r \text{ est la vitesse du point}$$

$$\vec{F}_e = +m\omega^2 \vec{\rho} \quad \text{pour un point tournant à la vitesse angulaire } \omega \text{ sur un cercle de rayon } \rho$$

La première force (force de coriolis) est ici nulle. La deuxième est la force d'entraîne-

ment. Avec $\rho = r \cos \varphi$, on obtient les composantes du poids, puis les composantes de \vec{g} puisque $\vec{g} = \frac{\vec{P}}{m}$:

$$\begin{aligned} g_x &= \frac{1}{2}\omega^2 r \sin 2\varphi \\ g_y &= \omega^2 r \cos^2 \varphi - \frac{GM}{r^2} \\ g_z &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Ce champ de pesanteur \vec{g} dérive du potentiel

$$V = \frac{GM}{r} + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2 \varphi \quad (5.6)$$

On rappelle qu'en coordonnées polaires la composante radiale de $\overrightarrow{\text{Grad } V}$ est $\frac{\partial V}{\partial r}$ et que sa composante orthoradiale est $\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi}$.

Géoïde

Comme \vec{g} dérive du potentiel V , toutes les surfaces $V = \text{Cste}$ (surfaces équipotentielles) sont normales à \vec{g} . Il existe⁷ une famille de telles surfaces, et par un point donné on peut en mener une et une seule.

Le géoïde est la surface équipotentielle du champ de pesanteur mené par un point pris au niveau de la mer.

5.8 Premiers éléments de géodésie

5.8.1 Courbure du géoïde

Soit deux points voisins A et B pris sur le géoïde. On peut mesurer l'angle des normales au géoïde en ces points : c'est l'angle de leur verticales, et c'est donc aussi l'arc $Z_A Z_B$ de la sphère céleste joignant les zéniths de ces deux lieux. On note α cet arc. Si les points A et B ont la même longitude (ou des longitudes très voisines), l'angle α est simplement la différence de leur latitude. La longueur AB est alors mesurée.

Définition : Le rapport $R = \frac{AB}{\alpha}$ (ou plutôt sa limite lorsque α tend vers zéro) est appelé **rayon de courbure** du géoïde **le long de la direction** AB .

Pour une surface quelconque, le rayon de courbure en un point dépend de la direction AB le long de laquelle on le mesure. Il admet une valeur maximale et une valeur minimale,

⁷L'existence d'une telle surface suppose que l'on soit à l'extérieur de la Terre (physique). Or le géoïde de référence passe sous les continents. La définition rigoureuse du géoïde utilise un prolongement mathématique de V (prolongement dit analytique) qui correspond à (5.6) à la surface des océans.

dans deux directions perpendiculaires : ce sont les rayons de courbure principaux.

Le principe de la détermination géodésique de la forme du géoïde est le suivant : on mesure les coordonnées astronomique de nombreux points de la Terre et on associe ces mesure à celles des distances séparant ces points. Cela permet de déterminer les rayons de courbure en ces points.

Malheureusement cette méthode n'est applicable qu'aux points où ces mesures sont possibles. Les régions océaniques lui échappent complètement. De plus ces mesures doivent être suffisamment précises et denses (par exemple : 1000 stations pour l'étendue de la France). La méthode est donc extrêmement lourdes et elle n'a été appliquée que dans un petit nombre de régions (Europe, USA, Inde, ...). Elle ne fournit qu'une description fragmentaire du géoïde pour des parties de sa surface non rattachées les unes des autres.

Déterminations gravimétriques

Cela consiste à mesurer l'**intensité de la pesanteur** (et non plus sa direction). Or on a vu que le champ des vecteurs \vec{g} est un champ de gradient. Ainsi son intensité et sa direction ne varie pas indépendamment l'une de l'autre. Ces mesures du module de \vec{g} permettent de déterminer sa direction et par suite la forme du géoïde.

Géodésie spatiale

C'est une discipline qui a pris un essor considérable depuis l'avènement des satellites artificiels. Elle est encore en plein développement (GPS, GALILEO, ...).

Tout d'abord, par leur simple présence, ces satellites constituent des cibles qui peuvent être visées simultanément, à partir de deux endroits très éloignés (deux continents). IL s'agit alors d'une géodésie géométrique tout comme la méthode de triangulation terrestre (voir ci-dessous).

Par ailleurs, la trajectoire de ces satellites est presque entièrement déterminée par le champ de gravité terrestre. L'observation astrométrique d'un satellite d'un lieu terrestre permet de définir la position de ce lieu par rapport à la trajectoire du satellite, avec une précision bien meilleur que le mètre.

5.8.2 Triangulation

Origines de la géodésie

La détermination de la figure de la Terre s'est faite par approximation successives, basées sur des hypothèses de plus en plus proches de la réalité.

Les astronomes ont admis très tôt que la Terre pouvait être un corps rond isolé dans l'espace. En la supposant sphérique, le seul paramètre à déterminer est son rayon. Il suffit alors de mesurer l'angle α des verticales et la distances AB . Ces deux points A et B n'ont même pas besoin d'être voisins. Il est admis qu'Erathostène a le premier, en 205 avant J-C, déterminer le rayon de la Terre par le rayon de courbure entre Syène et Alexandrie. La détermination d'un angle est relativement facile. La mesure de distances a été longtemps très délicate. La distance de Syène à Alexandrie a été estimée uniquement par la durée du voyage des caravanes allant entre ces deux villes. Ce n'est qu'en 1530 que la mesure de distance été améliorée par Fernel. Il estima la distance de Paris à Amiens par le nombre de tours de roue d'une voiture.

Triangulation



En 1669, l'abbé Picard inaugure la méthode moderne de déterminations de grandes distances par la triangulation. Sa première mesure a été faite encore entre Paris et Amiens.

Il s'agit d'établir des signaux géodésiques entre deux points éloignés et séparés par des obstacles naturels. Ces signaux sont des constructions visibles de loin, pointables dans la lunette d'un théodolite.

Ces points constituent les sommets d'une suite de triangles. Les côtés de ces triangles ont une trentaine de kilomètres de long environ. Avec le théodolite, on mesure tous les angles de tous ces triangles. Si on connaît l'un des côtés d'un des triangles. Il est possible de résoudre complètement ce triangle puis par suite tous les triangles de la chaîne.

Figure de gauche : Triangulation géodésique de la "méridienne" réalisée entre 1683 et 1718.

Il reste donc à déterminer l'un des côtés de l'un des triangles. On le mesure directement

avec une règle ou un fil de longueur connue. On choisit pour cela un côté de triangle particulièrement favorable (terrain plat, quelques kilomètres de longueur seulement) : c'est la **base** de la triangulation. On mesure souvent deux (voir plusieurs) bases aux extrémités de la chaîne de triangles. On peut ainsi vérifier l'ensemble des mesures et des calculs.

Si cette chaîne est assez petite et pour une certaine précision, on suppose que les triangles sont plans. De cette manière que Picard faisait. Dans cette hypothèse, une autre vérification est de s'assurer que la somme des angles de chaque triangles fait bien 180° . Mais, si en deuxième approximation, on suppose que la Terre est sphérique, on considère ces triangles comme des triangles sphériques. Il est alors nécessaire de connaître au moins une approximation du rayon de la Terre.

Par la suite, lorsqu'il c'est avéré que la Terre est aplatie, il est devenu utile de passer à la troisième approximation. Il s'agit de triangles géodésiques tracés sur une ellipsoïde et de leur appliquer les formules convenables ...

Aplatissement de la Terre

Les triangulations du début de XVIII^e siècle (Cassini, de Dunkerque à Perpignan), associées aux déterminations de latitude en plusieurs endroits de la chaîne, montrèrent que la courbure de la Terre pouvait être variable d'un endroit à un autre. On posa donc comme hypothèse que la Terre était un ellipsoïde de révolution autour de son axe de rotation. Il y a alors deux paramètres à déterminer : les demi-axes a et b de l'ellipse méridienne, ou encore le demi-axe équatoriale a et l'aplatissement :

$$\alpha = 1 - \frac{b}{a} \quad (5.7)$$

Le problème est que si on se doutait que la Terre est une ellipsoïde, on ne savait pas si elle était aplatie ($a < b$, $\alpha > 0$) ou si elle était allongée ($a > b$, $\alpha < 0$). Cassini penchait pour la deuxième hypothèse sur la foi de mesure peu probante. Newton avec des arguments de dynamique penchait pour la première hypothèse : il s'appuyait sur l'existence de forces centrifuge dues à la rotation de la Terre. On devait d'ailleurs démontrer par la suite que la figure d'équilibre d'une masse fluide homogène, en mouvement de rotation uniforme, est un ellipsoïde de révolution aplati.

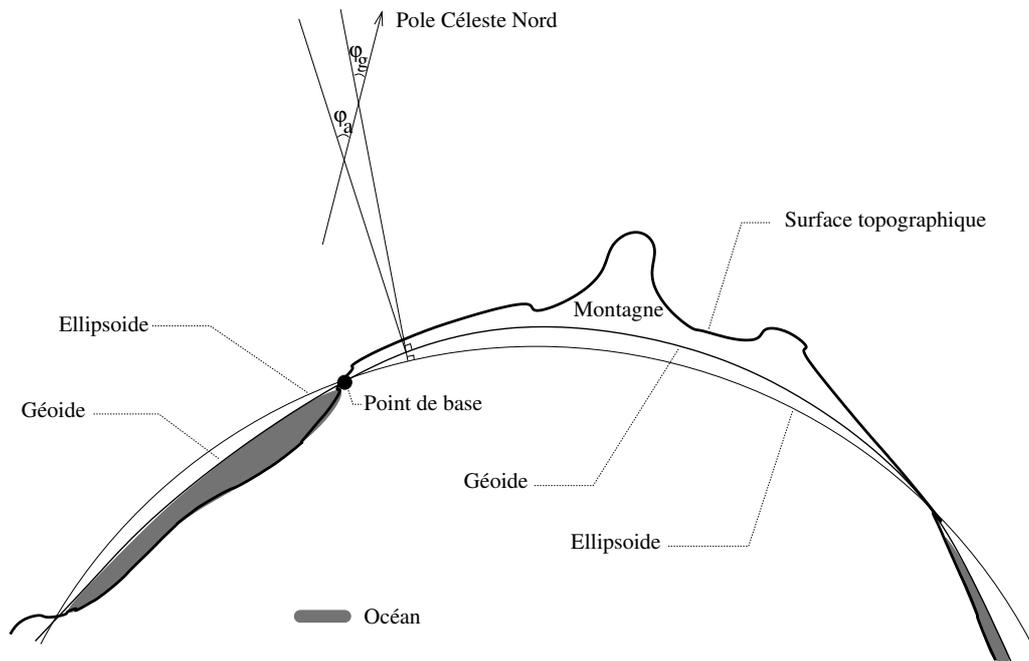
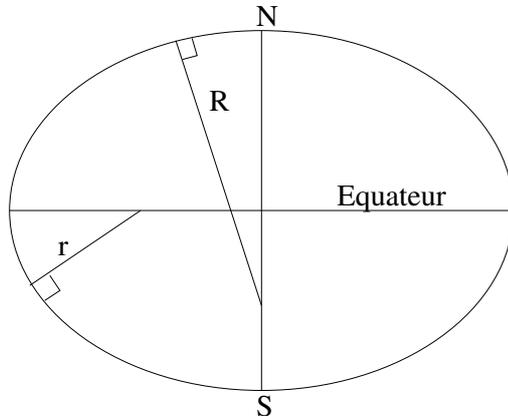


FIG. 5.5 – Latitude astronomique (par rapport au géοide) φ_a et latitude géodésique (par rapport à l'ellipsoïde de référence) φ_g .



Cette controverse fut à l'origine de grandes expéditions scientifiques en deux régions de la Terre où les rayons de courbure diffèrent beaucoup. Elles commencèrent en 1735 : une expédition dirigée par Maupertuis mesura un arc de méridien en Laponie, tandis qu'une autre expédition (Bouger et La Condamine) en mesurait un autre au Pérou et en Equateur.

Le degré de latitude dut trouver plus grand en Laponie qu'au Pérou. Ce qui prouva que la Terre était aplatie.

5.8.3 Coordonnées géodésiques

Pour faire la carte d'une région à une échelle déterminée, seules comptent les distances, et le comportement des verticales n'a pas lieu d'être considérées. Les cartes dites géodésiques utilisent les distances mesurées par triangulation. Les coordonnées se réfèrent à une **ellipsoïde de référence** de paramètres a et α donnés : ce sont les **coordonnées géodésiques** (pour la latitude géodésique voir la Figure 5.5). Cet ellipsoïde de référence est

relié au géoïde pour lui correspondre *au mieux*. Sur une carte géodésique un seul point est repéré par ces coordonnées astronomiques : c'est le **point de base**. Elle permet de relier la carte au globe terrestre. En France les différences entre les latitudes astronomiques et géodésiques ne dépassent pas une dizaine de seconde de degrés.

L'ellipsoïde de référence a une définition arbitraire. Il a été fixé (arbitrairement) lorsqu'il est apparu que le géoïde était représenté aussi bien qu'il pouvait l'être par un ellipsoïde : au degré de précision atteint, le géoïde n'est plus un ellipsoïde. Il s'agit alors d'une surface de référence par rapport à laquelle on décrit le géoïde, en donnant les petites différences d'altitude entre ces deux surfaces qui ne dépassent pas, sur Terre, une centaine de mètres.